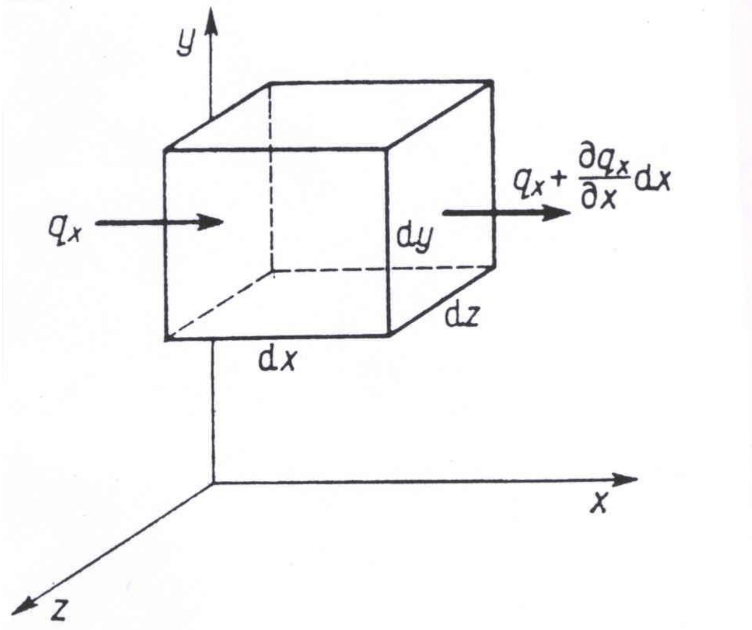
1. Równanie przewodnictwa cieplnego w ciałach stałych



Przewodzenie ciepła przez element ciała

Ilość ciepła wpływającego w czasie *dt* do rozpatrywanego elementu przez powierzchnię *dydz* odległą od początku układu współrzędnych o *x*

$$dQ'_x = q_x dydzdt \tag{1.1}$$

Ilość ciepła wypływającego w czasie *dt* z rozpatrywanego elementu przez powierzchnię *dydz* odległą od początku układu współrzędnych o $x + dx$

$$dQ''_x = \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dydzdt \tag{1.2}$$

Różnica pomiędzy ciepłem dopływającym a odpływającym w kierunku *x* wynosi

$$dQ_x = dQ'_x - dQ''_x$$
$$= -\frac{\partial q_x}{\partial x} dxdydzdt = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dVdt \tag{1.3}$$

gdzie $dV = dxdydz$ jest objętością rozpatrywanego elementu.

Analogicznie różnica pomiędzy ciepłem dopływającym a odpływającym wzdłuż pozostałych osi wynosi

$$\begin{aligned} dQ_y &= dQ'_y - dQ''_y \\ &= -\frac{\partial q_y}{\partial y} dxdydzdt = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dVdt \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} dQ_z &= dQ'_z - dQ''_z \\ &= -\frac{\partial q_z}{\partial z} dxdydzdt = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dVdt \end{aligned} \tag{1.5}$$

Wewnątrz elementu mogą działać źródła ciepła, których wydajność definiuje się następująco

$$q_v = \frac{dQ_w}{dVdt} \left[\frac{W}{m^3}\right] \tag{1.6}$$

Dla przewodzenia ciepła przy stałym ciśnieniu bilans energetyczny elementu ma postać

$$dQ' - dQ'' + dQ_w = dI \tag{1.7}$$

czyli

$$\begin{aligned} &\left(dQ'_x + dQ'_y + dQ'_z\right) - \left(dQ''_x + dQ''_y + dQ''_z\right) \\ &\qquad + q_v dVdt = \rho c_p dV \frac{\partial T}{\partial t} dt \end{aligned} \tag{1.8}$$

Po podstawieniu do (1.7) zależności (1.3) - (1.5) dostajemy

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dVdt + q_v dVdt \\ &\qquad = \rho c_p dV \frac{\partial T}{\partial t} dt \end{aligned} \tag{1.9}$$

Równanie (1.9) dzielimy przez $dVdt$ i podstawiamy do niego prawo Fouriera

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \tag{1.10a}$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \tag{1.10b}$$

$$q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \tag{1.10c}$$

Otrzymujemy w ten sposób *równanie przewodnictwa cieplnego*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + q_v = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{1.11}$$

Dla $\lambda = const$ równanie (1.11) można zapisać jako

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c_p} \tag{1.12}$$

gdzie

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{1.13}$$

jest *laplasjanem* temperatury. Wielkość

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left[\frac{m^2}{s}\right] \tag{1.14}$$

nazwana została *współczynnikiem dyfuzyjności cieplnej* lub *współczynnikiem wyrównywania temperatury*.

<u>Szczególne przypadki równania przewodnictwa cieplnego przy $\lambda = const$</u>

W ciele nie działają wewnętrzne źródła ciepła (*równanie Fouriera*)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T \tag{1.15}$$

Brak wewnętrznych źródeł ciepła, przewodzenie stacjonarne (*równanie Laplace'a*)

$$a\nabla^2 T = 0 \tag{1.16}$$

Dla przypadku jednowymiarowego równanie (1.16) przyjmuje postać

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \tag{1.17a}$$

lub

$$\frac{dT}{dx} = const \tag{1.17b}$$

Wewnętrzne źródła obecne, przewodzenie stacjonarne (*równanie Poissona*)

$$a\nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c_p} = 0 \tag{1.18}$$

2. Warunki graniczne

Warunek początkowy

$$T\left(x, y, z, 0\right) = f\left(x, y, z\right) \tag{2.1}$$

Warunki brzegowe

Warunek brzegowy pierwszego rodzaju

Znany jest rozkład temperatury na brzegu ciała w dowolnej chwili

$$T_w\left(t\right) = f(t) \tag{2.2}$$

Warunek brzegowy drugiego rodzaju

Znana jest gęstość strumienia ciepła na brzegu ciała w dowolnej chwili

$$q_w\left(t\right) = g(t) \tag{2.3}$$

Warunek brzegowy trzeciego rodzaju

Znana jest temperatura ośrodka otaczającego ciało oraz zależność opisująca wymianę ciepła pomiędzy ciałem a tym ośrodkiem

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w = \alpha\left(T_w - T_f\right) \tag{2.4}$$

gdzie $\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w$ oznacza pochodną w kierunku normalnym do powierzchni ciała, równą długości wektora grad T.

Warunek brzegowy czwartego rodzaju

Wymiana ciepła z otoczeniem na drodze przewodzenia

$$T_{w1}(t) = T_{w2}(t) \tag{2.5}$$

$$-\lambda_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial n}\right)_w = -\lambda_2\left(\frac{\partial T_2}{\partial n}\right)_w \tag{2.6}$$

3. Rozwiązanie równania Laplace'a dla przypadku jednowymiarowego

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = 0 \tag{3.1}$$

z warunkami brzegowymi pierwszego rodzaju

$$T(x=0) = T_{w1} \tag{3.2}$$

$$T(x=\delta) = T_{w2} \tag{3.3}$$

Równanie całkujemy dwukrotnie

$$\frac{dT(x)}{dx} = C_1 \tag{3.4}$$

$$T(x) = C_1 x + C_2 \tag{3.5}$$

W celu wyznaczenia stałych całkowania w rozwiązaniu ogólnym wykorzystujemy warunki brzegowe

$$T_{w1} = C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2 \tag{3.6}$$

$$T_{w2} = C_1\delta + C_2 \tag{3.7}$$

Z równania (3.6) dostajemy

$$C_2 = T_{w1} \tag{3.8}$$

a z równania (3.7)

$$C_1 = \frac{T_{w2} - T_{w1}}{\delta} \tag{3.9}$$

Rozwiązaniem szczególnym równania (3.1) spełniającym równanie (3.1) i warunki brzegowe (3.2) i (3.3) jest funkcja

$$T(x) = \frac{T_{w2} - T_{w1}}{\delta} x + T_{w1} \tag{3.10}$$

SPRAWDZENIE

Rozwiązanie (3.10) podstawiamy do równania (3.1). Po dwukrotnym zróżniczkowaniu otrzymujemy tożsamość 0 = 0.

Do równania (3.10) podstawiamy x = 0 i otrzymujemy

$$T(0) = T_{w1}$$

Do równania (3.10) podstawiamy x = δ i otrzymujemy

$$T(\delta) = T_{w2}$$

4. Rozwiązanie równania Poissona dla przypadku jednowymiarowego

$$a\frac{d^2T(x)}{dx^2} + \frac{q_v}{\rho c_p} = 0 \tag{4.1}$$

z warunkami brzegowymi pierwszego rodzaju

$$T(x=0) = T_{w1} \tag{4.2}$$

$$T(x=\delta) = T_{w2} \tag{4.3}$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (4.1) jest funkcja

$$T(x) = -\frac{q_v}{2\lambda}x^2 + C_1 x + C_2$$

natomiast rozwiązaniem szczególnym spełniającym warunki (4.2) i (4.3) funkcja

$$T(x) = -\frac{q_v}{2\lambda} x^2 + \frac{T_{w2} - T_{w1}}{\delta} x + \frac{q_v \delta}{2\lambda} x + T_{w1}$$