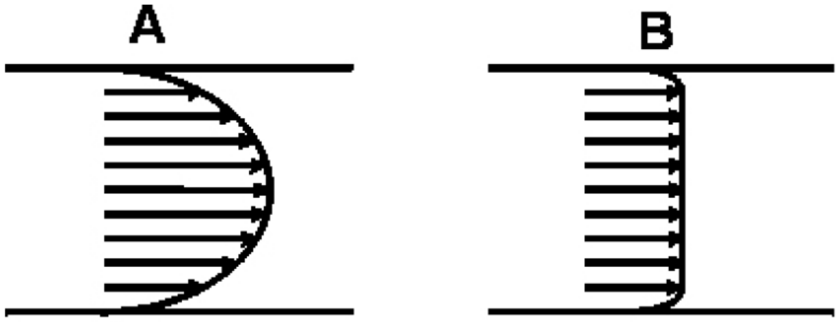
PRZEPŁYW CZYNNIKA ŚCIŚLIWEGO

1. Definicje podstawowe



Rys. 1.1. Profile prędkości w rurze.

A - przepływ laminarny, **B** - przepływ burzliwy.

Liczba *Reynoldsa* $\mathrm{Re} = \dfrac{w \cdot D}{\nu}$

w [m/s] – średnia prędkość w kanale

D [m] – średnica wewnętrzna kanału

ν [m^2/s] - współczynnik lepkości kinematycznej

$\mathrm{Re} < 2300$ - przepływ laminarny

$\mathrm{Re} > 10000$ - przepływ burzliwy

Średnia prędkość masowa

$$\dot{E}_k = \frac{\dot{m} w_m^2}{2} = \int_0^A w\rho \frac{w^2}{2}\, dA \qquad (1.1)$$

gdzie $w\rho\, dA = dm$

Średnia prędkość objętościowa

$$\dot{V} = A w_v = \int_0^A w dA \qquad (1.2)$$

gdzie $wdA = d\dot{V}$

$$\alpha = \left(\frac{w_m}{w_v} \right)^2 \tag{1.3}$$

Wartości współczynnika α dla przekroju kołowego:

- dla przepływu burzliwego $\alpha \cong 1$,
- dla przepływu laminarnego $\alpha \cong 2$.

Równanie ciągłości strumienia dla stanu stacjonarnego

$$\dot{m} = Aw\rho = \frac{Aw}{v} = idem \tag{1.4}$$

<u>Parametry spiętrzenia dla przepływu izentropowego</u>

Są to parametry stanu, jakie miałby czynnik po zatrzymaniu go na przeszkodzie, przy założeniu, że jego kompresja byłaby izentropowa. Dla gazu doskonałego

$$i_0 = i_1 + \frac{w_1^2}{2} \tag{1.5}$$

$$i_0 = c_p T_0 \tag{1.6}$$

$$\frac{p_0}{p_1} = \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \tag{1.7}$$

$$p_0 v_0 = RT_0 \tag{1.8}$$

2. Adiatermiczny stacjonarny przepływ gazu w kanale

Przy pominięciu zmian energii potencjalnej, bilans energii dla stacjonarnego ($\Delta \dot{E}_u = 0$) przepływu adiatermicznego przez nieruchomy kanał ma postać

$$\dot{E}_d = \dot{E}_w \qquad [\mathrm{W}] \tag{2.1}$$

gdzie

$$\dot{E}_d = \dot{m} \left(i_1 + \frac{w_1^2}{2} \right) \tag{2.2a}$$

$$\dot{E}_w = \dot{m}\left(i_2 + \frac{w_2^2}{2}\right) \qquad (2.2b)$$

Podstawienie (2.2a) i (2.2b) do (2.1) daje

$$i_1 + \frac{w_1^2}{2} = i_2 + \frac{w_2^2}{2} \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right] \qquad (2.3)$$

Stąd prędkość na wylocie z kanału

$$w_2 = \sqrt{2(i_1 - i_2) + w_1^2} \quad [\mathrm{m/s}] \qquad (2.4)$$

Jeżeli $w_1 = 0$ lub i_1 jest entalpią spiętrzenia, to

$$w_2 = \sqrt{2(i_1 - i_2)} \qquad (2.5)$$

Dla gazu doskonałego $i = c_p T$, stąd dla tego przypadku (2.4) przechodzi w

$$w_2 = \sqrt{2c_p(T_1 - T_2) + w_1^2} \qquad (2.6)$$

a (2.5) przyjmuje postać

$$w_2 = \sqrt{2c_p(T_1 - T_2)} \qquad (2.7)$$

W (2.7) $w_1 = 0$ lub T_1 jest temperaturą spiętrzenia.

3. Przepływ izentropowy gazu doskonałego

W rozważaniach poniżej numerem "1" oznaczono parametry spiętrzenia.

Dla przepływu izentropowego parametry gazu doskonałego w dwóch dowolnych przekrojach kanału związane są równaniami izentropy. Pomiędzy temperaturami i ciśnieniami istnieje następujący związek

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \qquad (3.1)$$

Równanie (2.7) można przekształcić do postaci

$$w_2 = \sqrt{2c_p T_1\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right)} \tag{3.2}$$

Do (3.2) podstawiamy teraz prawą stronę równania (3.1) oraz

$c_p = \dfrac{\kappa R}{\kappa - 1}$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} w_2 &= \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_1 \left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} \\ &= \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_1 v_1 \left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} \end{aligned} \tag{3.3}$$

w_2 osiąga wartość maksymalną, gdy $p_2 = 0$

$$w_{2\max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} R T_1} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_1 v_1} \tag{3.4}$$

Strumień gazu w przekroju 2

$$\dot{m} = \frac{A_2 w_2}{v_2} = \frac{A_2}{v_2}\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_1 v_1 \left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} \tag{3.5}$$

Z równania izentropy

$$v_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\kappa} v_1 \tag{3.6}$$

Równanie (3.6) podstawiamy do prawej strony równania (3.5)

$$\dot{m} = \frac{A_2 w_2}{v_2} = A_2\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\frac{p_1}{v_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right]} \tag{3.7}$$

4. Parametry krytyczne

Niech $w_1 = 0$. Dla skończonej wartości strumienia $\dot{m}$ jest

$$A_1 = \frac{\dot{m}v_1}{w_1} = \frac{\dot{m}v_1}{0} = \infty \tag{4.1}$$

Rozprężanie gazu do ciśnienia $p_2 = 0$ prowadzi do skończonej prędkości $w_2 = w_{2\max}$ (wzór 3.4), przy czym

$v_2 = RT_2 / p_2 = \infty$

$$A_2 = \frac{\dot{m}v_2}{w_2} = \frac{\dot{m}\infty}{w_2} = \infty \tag{4.2}$$

Dla $p_1 > p_2 > 0$ pole przekroju poprzecznego kanału ma wartość skończoną, czyli kanał składa się z części zbieżnej i rozbieżnej. Wyznaczymy teraz stosunek ciśnień $\pi = \frac{p_2}{p_1}$, gdzie "2" dotyczy przekroju <u>minimalnego</u>, a "1" przekroju wlotowego do kanału. W tym celu wykorzystamy zależność

$$\dot{m} = A_2 \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_1}{v_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right]} = idem \tag{4.3}$$

Dla $\dot{m} = idem$ oraz $A_2 = min$, wyrażenie

$$K = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} = \pi^{\frac{2}{\kappa}} - \pi^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \tag{4.4}$$

osiąga maksimum. Funkcja $K(\pi)$ jest wypukła do góry. Warunek na jej maksimum jest więc następujący

$$\frac{dK(\pi)}{d\pi} = 0 \tag{4.5}$$

Po wykonaniu różniczkowania otrzymujemy

$$\frac{2}{\kappa}\pi^{\frac{2}{\kappa}-1} - \frac{\kappa+1}{\kappa}\pi^{\frac{\kappa+1}{\kappa}-1} = 0 \tag{4.6}$$

Z równania (4.6) wyznaczamy π

$$\pi = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \beta = \frac{p_{kr}}{p_1} \tag{4.7}$$

β - krytyczny stosunek ciśnień; p_{kr} - ciśnienie krytyczne

Pozostałe parametry termiczne w przekroju krytycznym

$$\frac{T_{kr}}{T_1} = \left(\frac{p_{kr}}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{2}{\kappa+1} \tag{4.8}$$

$$\frac{v_{kr}}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p_{kr}}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{1}{\kappa}} = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \tag{4.9}$$

Prędkość krytyczną wyznaczamy z zależności

$$w_2 = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} \tag{4.10}$$

Po podstawieniu do (4.10) wyrażenia (4.7) na krytyczny stosunek ciśnień otrzymujemy

$$w_{kr} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} p_1 v_1} \tag{4.11}$$

Po wprowadzeniu do (4.11) zależności $p_1 v_1 = RT_1$ oraz $T_{kr}/T_1 = 2/(\kappa+1)$ dostajemy

$$w_{kr} = \sqrt{\kappa R T_{kr}} \tag{4.12}$$

Prędkość krytyczna równa jest prędkości dźwięku dla parametrów krytycznych.

$$w_{kr} = a \tag{4.13}$$

Gdy prędkość wlotowa do kanału jest niezerowa, indeks "1" oznacza parametry spiętrzenia.

Liczba *Macha*

$$M = \frac{w}{a} \tag{4.14}$$

$M > 1 \Rightarrow w > a$ - prędkość naddźwiękowa

$M < 1 \Rightarrow w < a$ - prędkość poddźwiękowa

Rodzaje dysz:

- *Bendemanna* – kanał zwężający się: $p_{2\min} = p_{kr}$, $w_{\max} = a$
- *de Lavala* – kanał zwężający się, a następnie rozszerzający się: $p_{2\min} = 0$, $w_{\max} > a$

5. Przepływ przez dyszę

Podczas stacjonarnego przepływu przez dyszę strumień gazu jest stały

$$\dot{m} = Aw\rho = idem \tag{5.1}$$

Wzdłuż drogi przepływu zmieniają się przekrój poprzeczny kanału, A, prędkość gazu, w, oraz gęstość gazu, ρ.

Można wykazać, że podczas izentropowego przepływu przez dyszę obowiązuje zależność

$$\frac{dA}{A} = \left(M^2 - 1\right)\frac{dw}{w} \tag{5.2}$$

W zwężającej się części dyszy ($dA/A < 0$) prędkość gazu wzrasta ($dw/w > 0$). Czyli musi być

$$M^2 - 1 < 0 \tag{5.3}$$

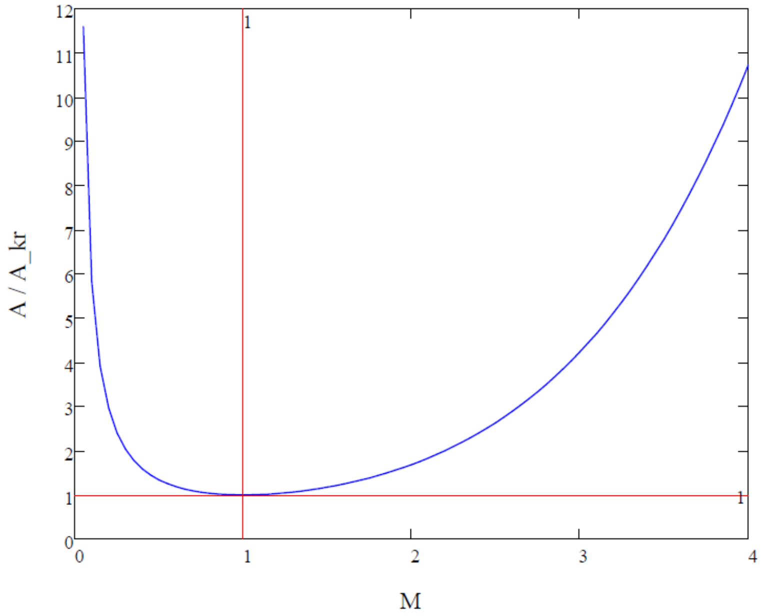
Oznacza to, że w tej części dyszy prędkość gazu nie przekracza prędkości dźwięku (prędkości krytycznej). Prędkość gazu przekraczającą prędkość dźwięku można uzyskać w rozszerzającej się części dyszy. Aby przy

$$M^2 - 1 > 0 \tag{5.4}$$

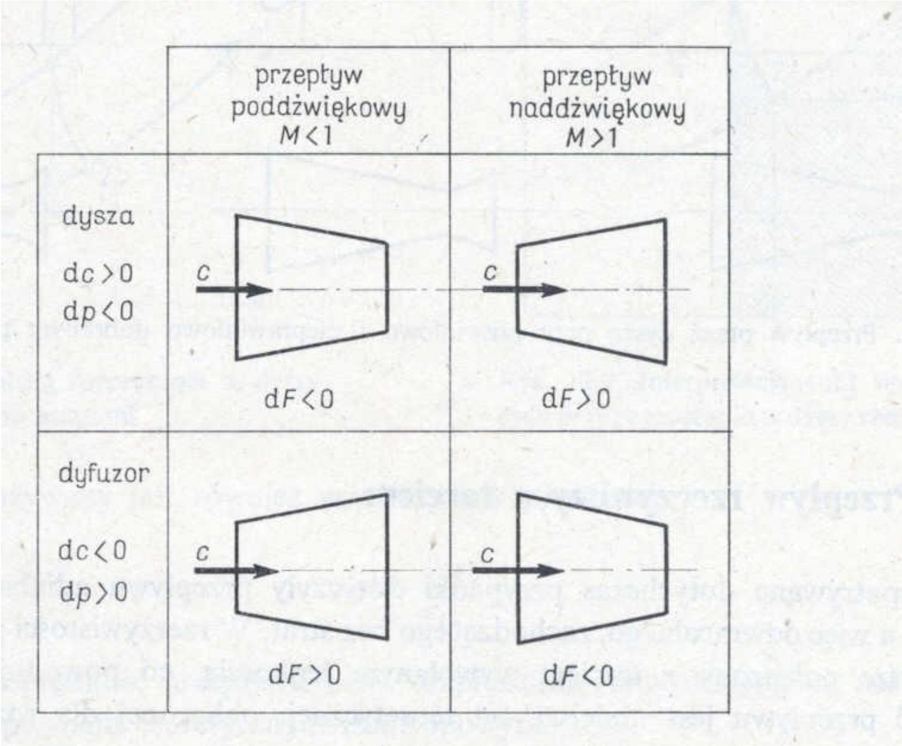
uzyskać $dw/w > 0$ musi być $dA/A > 0$.

Zależność stosunku pola przekroju poprzecznego dyszy do pola przekroju krytycznego (najmniejszego) od liczby Macha, M, i wykładnika izentropy, κ, jest następująca

$$\frac{A}{A_{kr}}(M,\kappa)=\frac{1}{M}\left[\frac{1+\frac{\kappa-1}{2}M^2}{\frac{\kappa+1}{2}}\right]^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \tag{5.5}$$

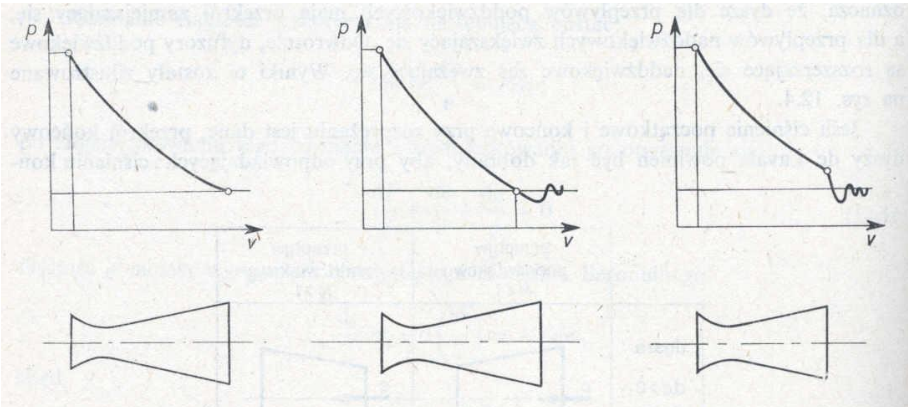


Rys. 6.1. Zależność stosunku pola przekroju poprzecznego dyszy do pola przekroju krytycznego (najmniejszego) od liczby Macha, M, dla wykładnika izentropy κ = 1,4.



Dysze i dyfuzory dla przepływów poddźwiękowych i naddźwiękowych

Na rysunku wyżej c jest prędkością gazu, F jest przekrojem poprzecznym kanału.



Rys. 12.5. Przepływ przez dyszę przy prawidłowo i nieprawidłowo dobranym przekroju końcowym

6. Przepływ rzeczywisty z tarciem

Sprawność dyszy

$$\eta_d = \frac{i_1 - i_2}{i_1 - i_{2s}} \qquad (6.1)$$

Współczynnik prędkości

$$\varphi = \frac{w_2}{w_{2s}} \tag{6.2}$$

$$\eta_d = \frac{\frac{w_2^2}{2}}{\frac{w_{2s}^2}{2}} = \left(\frac{w_2}{w_{2s}}\right)^2 = \varphi^2 \tag{6.3}$$