

## PODSTAWY WYMIANY CIEPŁA

### *1. Podstawowe pojęcia w wymianie ciepła*

Sposoby transportu ciepła:

- przewodzenie
- konwekcja
  - swobodna
  - wymuszona
- promieniowanie

Transport ciepła w ciałach stałych odbywa się na drodze przewodzenia. Z przewodzeniem ciepła mamy do czynienia, gdy makroskopowe części ośrodka nie przemieszczają się względem siebie. Podczas przewodzenia cząstki materii o większej energii przekazują swoją energię cząstkom materii o mniejszej energii w wyniku ich wzajemnego oddziaływania. Konwekcja jest transportem ciepła spowodowanym przemieszczaniem się i mieszaniem się płynu. Gdy ruch płynu spowodowany jest różnicą temperatur w płynie, mamy do czynienia z konwekcją swobodną. W przypadku konwekcji wymuszonej przemieszczanie płynu wywołane jest przez pompę lub sprężarkę. Transport ciepła pomiędzy płynem (cieczą i gazem) a ścianką jest nazywany wnikaniem lub przejmowaniem ciepła. Wnikanie łączy transport ciepła na drodze konwekcji z transportem ciepła na drodze przewodzenia. Dominującym sposobem transportu ciepła w płynach może być przewodzenie. Promieniowanie ciepła polega na transporcie energii w postaci promieniowania elektromagnetycznego o określonej długości fal.

Pole temperatury

- niestacjonarne (temperatura zależy od położenia elementu ciała oraz czasu)

$$T = f(x, y, z, t) \quad (1.1)$$

- stacjonarne (temperatura w danym punkcie ciała nie zależy od czasu)

$$T = f(x, y, z) \quad (1.2a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1.2b)$$

Zagadnienie wymiany ciepła może być:

- jednowymiarowe (temperatura zmienia się tylko względem jednej współrzędnej),
- dwuwymiarowe (temperatura zmienia się tylko względem dwóch współrzędnych),
- trójwymiarowe (temperatura zmienia się względem wszystkich współrzędnych).

## 2. Przewodzenie ciepła

### 2.1. Prawo Fouriera

Prawo Fouriera wiąże gęstość strumienia przewodzonego ciepła w określonym punkcie ciała z gradientem temperatury w tym punkcie

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad}T = -\lambda \nabla T \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (2.1)$$

gdzie  $\lambda \left[ \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$  jest współczynnikiem przewodzenia ciepła (przewodnością cieplną), którego wartość zależy od rodzaju ciała, a także od temperatury. Dla kartezjańskiego układu współrzędnych prostokątnych

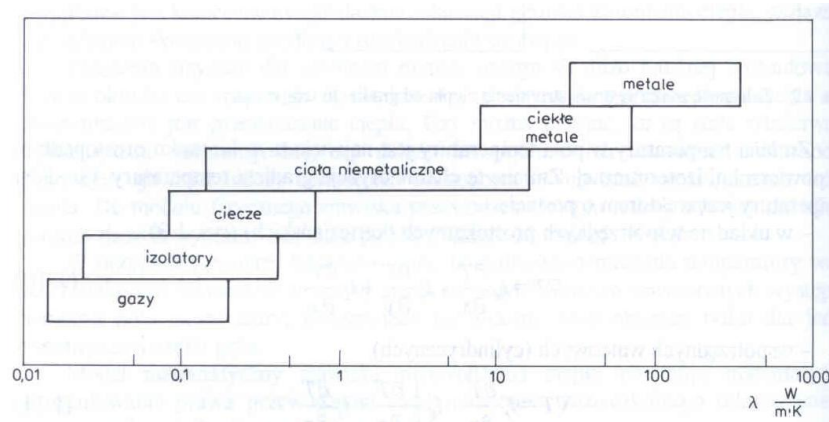
$$\text{grad}T \equiv \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k} \quad (2.2)$$

W prostokątnym układzie współrzędnych wektor  $\mathbf{q}$  ma trzy współrzędne

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.3a)$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.3b)$$

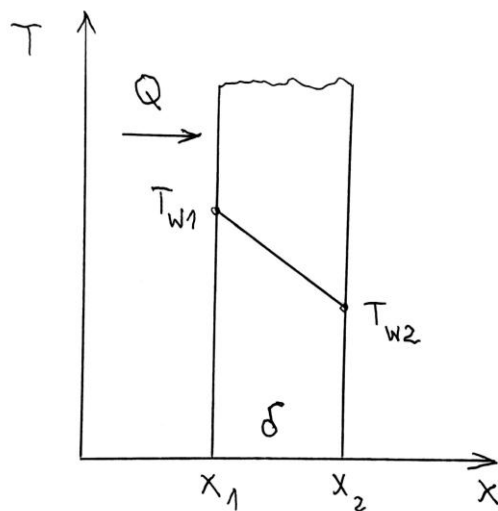
$$q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.3c)$$



**Rys. 2-1.** Zakresy wartości współczynników przewodzenia ciepła.

## 2.2. Stacjonarne przewodzenie ciepła przez ściankę płaską przy

$$\lambda = const$$



Równanie różniczkowe opisujące ten przypadek przewodzenia (prawo Fouriera)

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (2.4)$$

Równanie (2.4) rozwiązujemy metodą rozdzielania zmiennych

$$qdx = -\lambda dT \quad (2.5)$$

Dla przypadku stacjonarnego przez ściankę płaską gęstość strumienia ciepła  $q$  jest stała. Równanie (2.5) całkujemy stronami

$$\int_{x_1}^{x_2} qdx = - \int_{T_{w1}}^{T_{w2}} \lambda dT \quad (2.6)$$

$$q(x_2 - x_1) = -\lambda(T_{w2} - T_{w1}) \quad (2.7)$$

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(T_{w1} - T_{w2}) \quad (2.8)$$

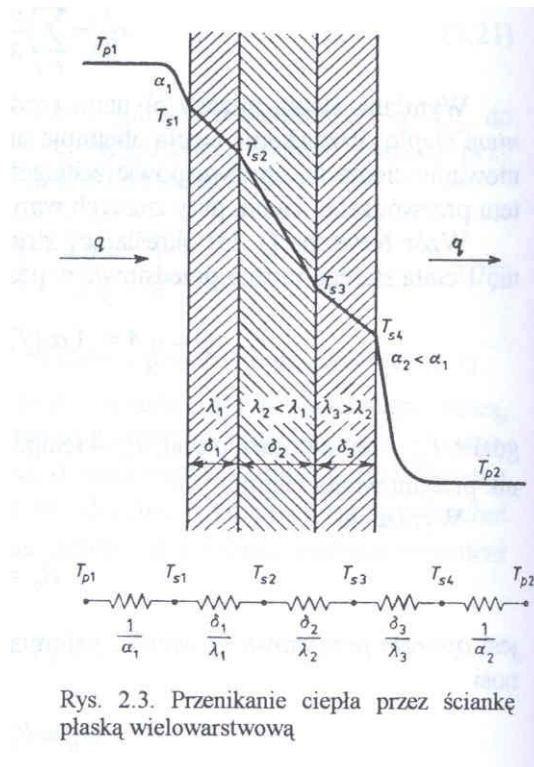
gdzie  $\delta = x_2 - x_1$  jest grubością ścianki przewodzącej ciepło.

Dla ścianki o powierzchni  $A$

$$Q = Aq = \frac{A\lambda}{\delta}(T_{w1} - T_{w2}) \quad (2.9)$$

$$\lambda = \frac{Q\delta}{A(T_{w1} - T_{w2})} \quad (2.10)$$

## 2.2. Stacjonarne przewodzenie ciepła przez ściankę płaską wielowarstwową



Do obliczenia strumienia ciepła przewodzonego przez ściankę wielowarstwową można użyć wzoru (2.9) pod warunkiem, że współczynnik przewodzenia ciepła zostanie zastąpiony tzw. zastępczym współczynnikiem przewodzenia ciepła

$$\lambda_z = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} \quad (2.11)$$

gdzie:

$i$  – numer warstwy

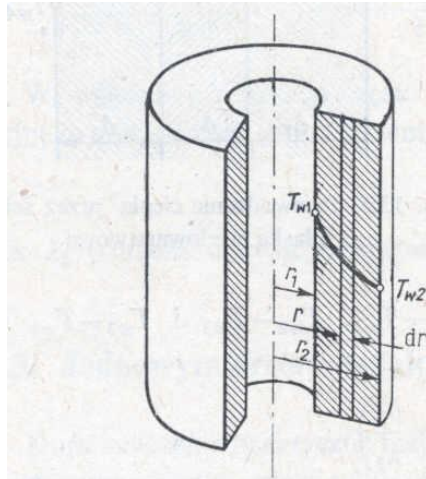
$n$  – liczba warstw

$\delta_i$  – grubość warstwy o numerze  $i$

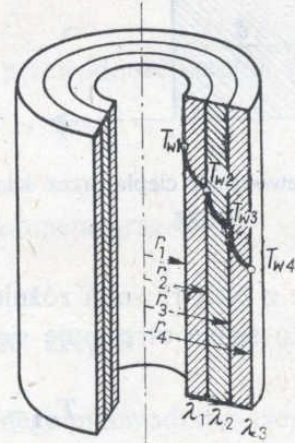
$\lambda_i$  – współczynnik przewodzenia ciepła dla warstwy o numerze  $i$

### 2.3. Stacjonarne przewodzenie przez ściankę cylindryczną przy

$\lambda = const$



Rys. 13.6. Przewodzenie ciepła przez ściankę walcową



Rys. 13.7. Przewodzenie ciepła przez ściankę walcową wielowarstwową

$$q = -\lambda \frac{dT}{dr} \quad [W/m^2] \quad (2.12)$$

gdzie w przypadku ścianki cylindrycznej  $q$  zależy od promienia  $r$

$$q = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2\pi r l} \quad (2.13)$$

natomiast  $Q = const$ .

Podstawiamy prawą stronę równania (2.13) zamiast  $q$  w równaniu (2.12)

$$Q = -2\pi r l \lambda \frac{dT}{dr} \quad [W] \quad (2.14)$$

W równaniu (2.14) rozdzielamy zmienne i całkujemy równanie stronami

$$Q \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -2\pi l \lambda \int_{T_{w1}}^{T_{w2}} dT \quad (2.15)$$

$$Q \ln \frac{r_2}{r_1} = -2\pi l \lambda (T_{w2} - T_{w1}) \quad (2.16)$$

$$Q = \frac{2\pi l \lambda}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (T_{w1} - T_{w2}) = \frac{2\pi l \lambda}{\ln \frac{d_2}{d_1}} (T_{w1} - T_{w2}) \quad (2.17)$$

Strumień ciepła odniesiony do jednostki długości rury

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{2\pi\lambda}{\ln \frac{d_2}{d_1}} (T_{w1} - T_{w2}) \quad [W / m] \quad (2.18)$$

Dla ścianki wielowarstwowej

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{2\pi\lambda_z}{\ln \frac{d_{n+1}}{d_1}} (T_1 - T_{n+1}) \quad (2.19)$$

gdzie:

$$\lambda_z = \frac{\ln \frac{d_{n+1}}{d_1}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} \quad (2.20)$$

$i$  – numer warstwy

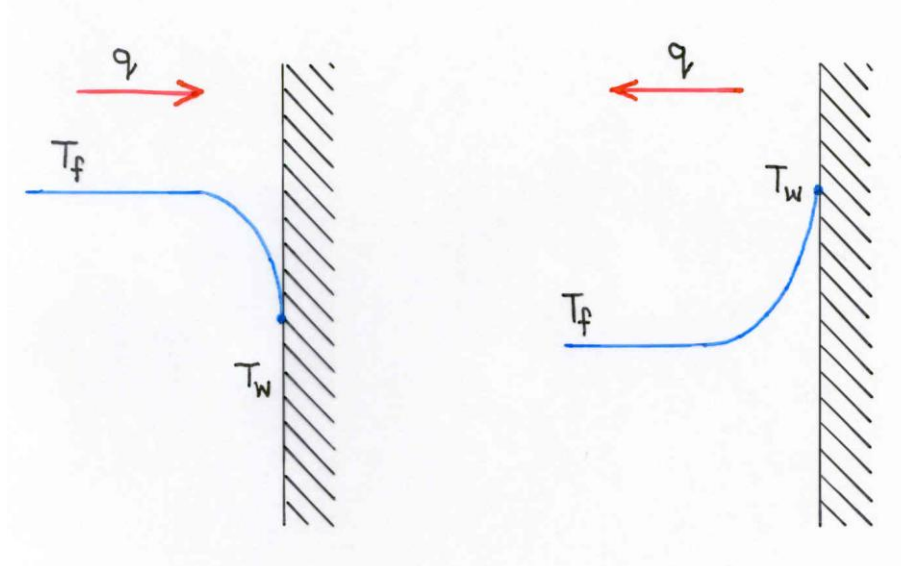
$n$  – liczba warstw

$d_i$  – średnica warstwy o numerze  $i$  (pierwsza warstwa, o najmniejszej średnicy, ma nr 1)

$\lambda_i$  – współczynnik przewodzenia ciepła dla warstwy o numerze  $i$

### **3. Wnikanie (przejmowanie) ciepła**

Wnikaniem ciepła nazywamy wymianę ciepła pomiędzy ścianką i omywającym ją płynem. Ciepło w płynie jest transportowane na drodze konwekcji i przewodzenia.



Równanie Newtona

$$Q = A\alpha(T_w - T_f) \quad (3.1)$$

$\alpha \left[ \frac{W}{m^2 K} \right]$  – współczynnik wnikania (przejmowania) ciepła

$\alpha$  zależy od:

- prędkości płynu:  $w$ ,
- od kształtu, wielkości, rodzaju i temperatury powierzchni wymiany ciepła:  $\varphi, l_1, l_2, \dots, T_w$ ,
- od parametrów termofizycznych płynu:  $T_f, p, \rho, c, \lambda, \nu$ .

$$\alpha = f(w, T_f, T_w, p, \rho, c, \lambda, \nu, \varphi, l_1, l_2, \dots) \quad (3.2)$$

Przykład

Dla wymuszonego przepływu burzliwego cieczy lub gazu w kanale na drodze doświadczalnej określono zależność

$$Nu = C Re^m Pr^n \quad (3.3)$$

gdzie typowe wartości  $m$  oraz  $n$  wynoszą:  $m = 0,8$ ;  $n = 0,4$ .

Liczba *Nusselta* (bezwymiarowa)

$$Nu = \frac{\alpha d_h}{\lambda} \quad (3.4)$$

Liczba *Reynoldsa* (bezwymiarowa)



$$Re = \frac{wd_h}{\nu} \quad (3.5)$$

gdzie  $\nu [m^2/s]$  jest współczynnikiem lepkości kinematycznej.

Liczba *Prandtla* (bezwymiarowa)

$$Pr = \frac{\nu}{a} \quad (3.6)$$

Z równania (3.4) wyznacza się współczynnik wnikania ciepła

$$\alpha = \frac{\lambda Nu}{d_h} \quad [W/(m^2 \cdot K)] \quad (3.7)$$

Współczynnik wyrównania temperatury  $a$  jest definiowany następująco

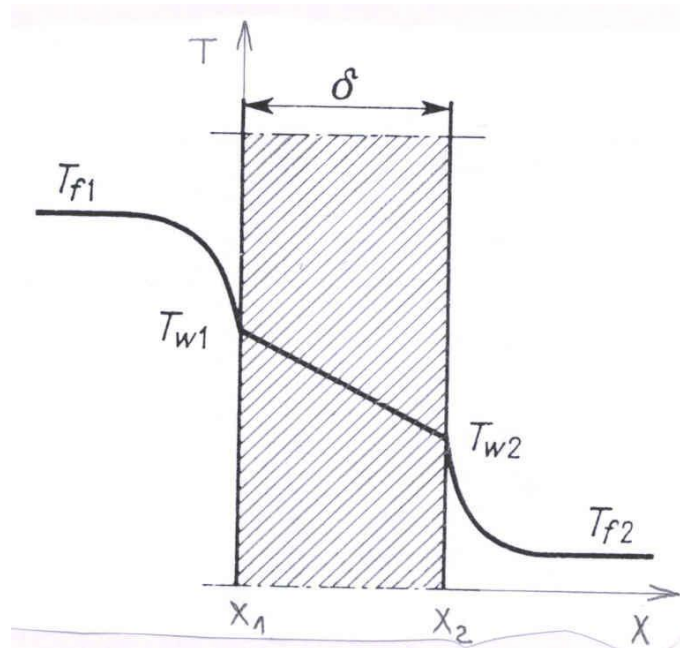
$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad [m^2/s] \quad (3.8)$$

Zakresy wartości współczynników przyjmowania ciepła w  $\frac{W}{m^2 \cdot K}$

Rodzaj płynu	Konwekcja swobodna	Konwekcja wymuszona
Gaz	5 – 30	30 – 500
Woda	30 – 300	300 – $2 \cdot 10^4$
Olej	5 – 100	30 – 3000
Ciekłe metale	50 – 500	500 – $2 \cdot 10^4$
Wrząca woda	$2 \cdot 10^3$ – $2 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^3$ – $10^5$
Kondensacja pary wodnej	$3 \cdot 10^3$ – $3 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^3$ – $2 \cdot 10^5$

#### 4. Przenikanie ciepła

Przenikaniem ciepła nazywamy transport ciepła od płynu o wyższej temperaturze do płynu o niższej temperaturze przez przegrodę.



$$q = k(T_{f1} - T_{f2}) \quad [\text{W/m}^2] \quad (4.1)$$

gdzie  $k \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right]$  jest współczynnikiem przenikania ciepła

Dla ścianki o powierzchni  $A$

$$Q = Aq \quad (4.2)$$

#### 4.1. Przenikanie ciepła przez ściankę płaską o grubości $\delta$

Wnikanie ciepła do ścianki

$$q = \alpha_1(T_{f1} - T_{w1}) \quad (4.3)$$

Przewodzenie ciepła przez ściankę

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(T_{w1} - T_{w2}) \quad (4.4)$$

Przejmowanie ciepła przez płyn

$$q = \alpha_2(T_{w2} - T_{f2}) \quad (4.5)$$

Z (4.3)

$$T_{f1} - T_{w1} = \frac{q}{\alpha_1} \quad (4.6)$$

Z (4.4)

$$T_{w1} - T_{w2} = \frac{q\delta}{\lambda} \quad (4.7)$$

Z (4.5)

$$T_{w2} - T_{f2} = \frac{q}{\alpha_2} \quad (4.8)$$

Równania (4.6)-(4.8) sumujemy stronami

$$T_{f1} - T_{f2} = q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \quad (4.9)$$

$$q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} (T_{f1} - T_{f2}) \quad (4.10)$$

Z porównania (4.10) z (4.1) otrzymujemy

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \quad (4.11)$$

#### 4.2. Przenikanie ciepła przez ściankę cylindryczną

$$Q = \frac{\pi l (T_{f1} - T_{f2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}} \quad (4.12)$$

$$q_l = \frac{Q}{l} = \pi k_l (T_{f1} - T_{f2}) \quad [W/m] \quad (4.13)$$

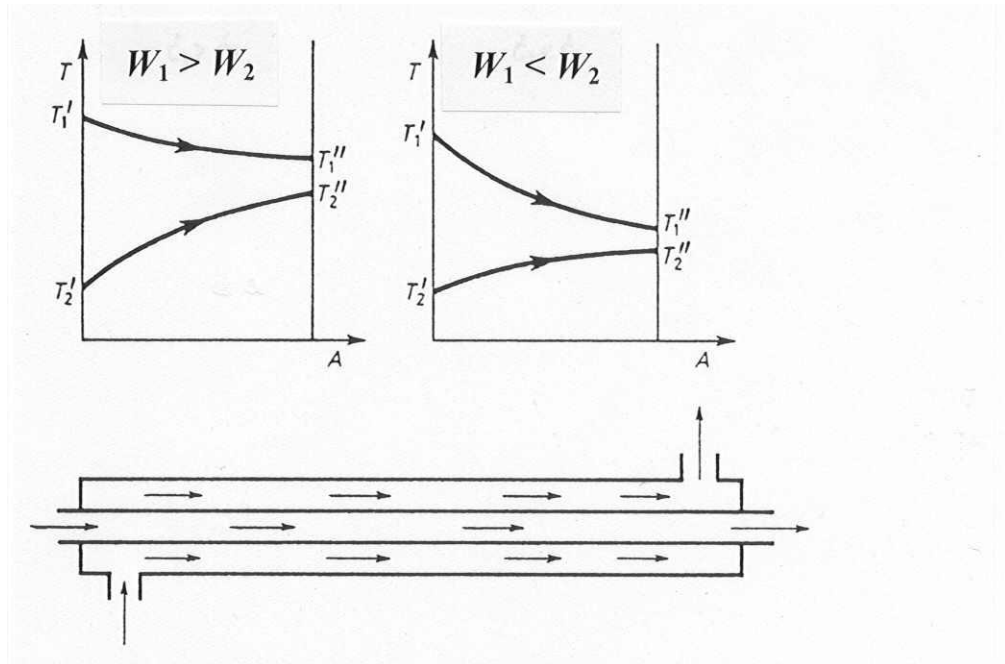
gdzie  $k_l \left[ \frac{W}{mK} \right]$  jest liniowym współczynnikiem przenikania

ciepła

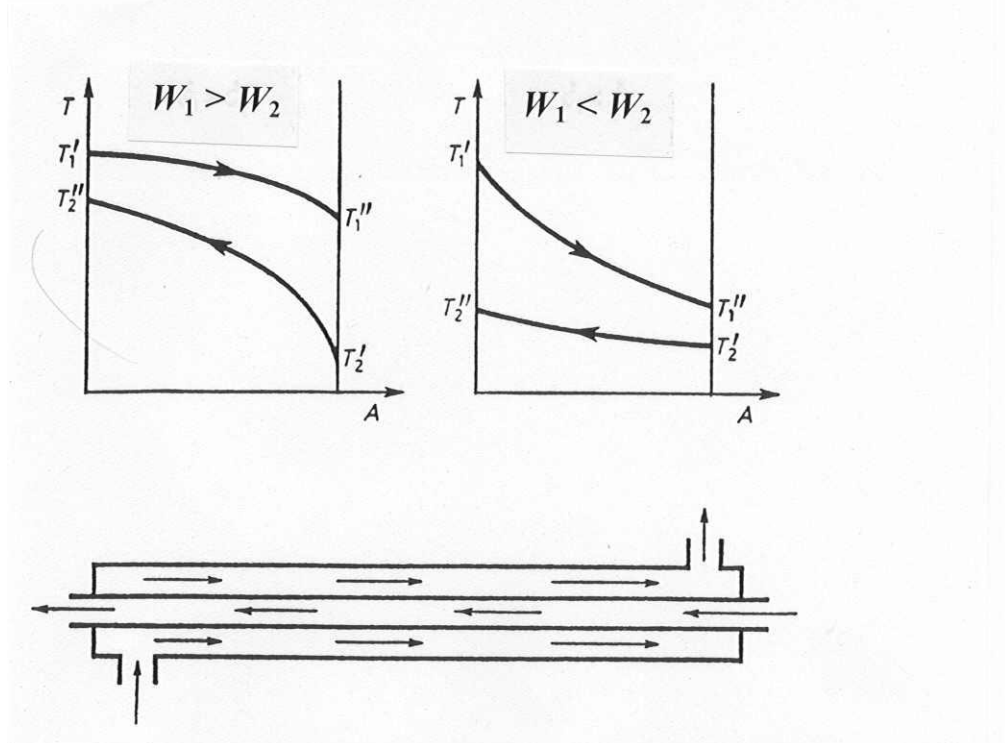
$$\frac{1}{k_l} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \quad (4.14)$$

#### 5. Obliczanie wymienników ciepła

Pojemność cieplna czynnika  $W = \dot{m}c_p$ . Czynniki cieplejszy ma indeks 1.



Zmiany temperatur płynów we współprądowym wymienniku ciepła



Zmiany temperatur płynów w przeciwprądowym wymienniku ciepła

Bilans energetyczny wymiennika ciepła

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 c_{p1} (T_1' - T_1'') = \dot{m}_2 c_{p2} (T_2'' - T_2') \quad (5.1a)$$

$$\dot{Q} = W_1(T_1' - T_1'') = W_2(T_2'' - T_2') \quad (5.1b)$$

Równanie wymiany ciepła

$$\dot{Q} = kA_0\Delta T_{sr} \quad (5.2)$$

Średnia różnica temperatur

$$\Delta T_{sr} = \frac{\int_0^{A_0} [T_1(A) - T_2(A)] dA}{A_0} \quad (5.3)$$

Średnia różnica temperatur dla wymienników współprądowych i przeciwaprądowych

$$\Delta T_{sr} = \frac{\Delta T' - \Delta T''}{\ln \frac{\Delta T'}{\Delta T''}} \quad (5.4)$$

Gdzie dla współprądu

$$\Delta T' = T_1' - T_2' \quad (5.5a)$$

$$\Delta T'' = T_1'' - T_2'' \quad (5.5b)$$

- dla przeciwaprądu

$$\Delta T' = T_1' - T_2'' \quad (5.5c)$$

$$\Delta T'' = T_1'' - T_2' \quad (5.5d)$$

Dla określonych temperatur wlotowych i wylotowych średnia różnica temperatur jest największa przy przepływie przeciwaprądowym, a najmniejsza dla przepływu współprądowego.

Średnia różnica temperatur dla wymienników o przepływie krzyżowo prądowym i mieszanym ( $\Delta T_{srm}$ ) leży w przedziale pomiędzy średnią dla współprądu ( $\Delta T_{srwp}$ ) i przeciwaprądu ( $\Delta T_{srpp}$ )

$$\Delta T_{srpp} > \Delta T_{srm} > \Delta T_{srwp} \quad (5.6)$$

Średnią różnicę temperatur dla wymienników o przepływie krzyżowym i mieszanym można wyznaczyć wykorzystując poprawkę  $\varepsilon_{\Delta T}$

$$\Delta T_{srm} = \Delta T_{srpp} \varepsilon_{\Delta T} \quad (5.7)$$

gdzie

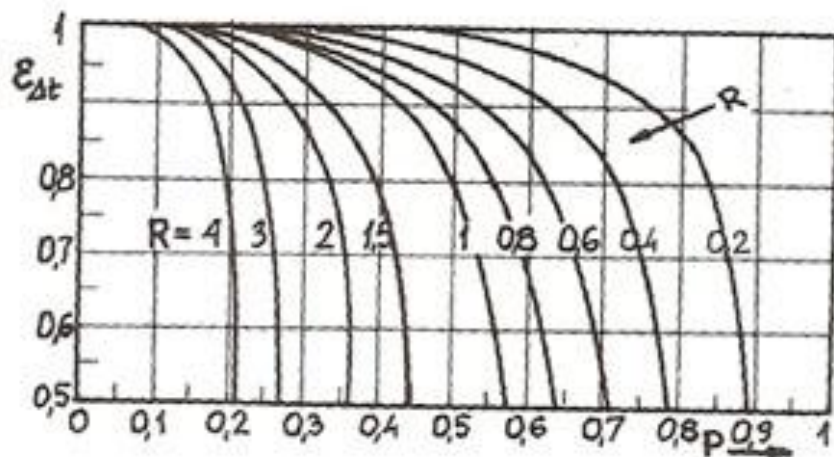
$$1 > \varepsilon_{\Delta T} > 0 \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_{\Delta T} = f(P, R) \quad (5.9)$$

$$P = \frac{T_2'' - T_2'}{T_1' - T_2'} = \frac{\Delta T_2}{\Delta T_{\max}} \quad (5.10a)$$

$$R = \frac{T_1' - T_1''}{T_2'' - T_2'} = \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} \quad (5.10b)$$

Korzystając z wykresów poprawek  $\varepsilon_{\Delta T}$  należy zwrócić uwagę na to, dla jakiego przypadku są te poprawki, tzn. którym kanałem (w rurkach, na zewnątrz rurek) płynie czynnik gorący (1), a którym czynnik zimny (2). W pewnych przypadkach może to być bez znaczenia.



Poprawka  $\varepsilon_{\Delta T} = f(P, R)$

Każdy typ wymiennika ma swój wykres poprawek

$$\varepsilon_{\Delta T} = f(P, R).$$