Równania różniczkowe

1. Wstęp

Równaniem różniczkowym nazywamy równanie zawierające funkcje niewiadome, zmienne niezależne oraz pochodne funkcji niewiadomych (lub ich różniczki).

Przykłady

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - xy^5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \sin y = 0 \tag{1.1}$$

$$x\mathrm{d}^2 y\mathrm{d}x - \mathrm{d}y(\mathrm{d}x)^2 = e^y(\mathrm{d}y)^3 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xyz\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} \tag{1.3}$$

- równanie różniczkowe zwyczajne
- równanie różniczkowe cząstkowe
- rząd równania różniczkowego
- całka równania różniczkowego
- całkowanie równania różniczkowego
- rozwiązanie równania różniczkowego
- warunki początkowe
- warunki brzegowe
- jednoznaczność rozwiązania równania różniczkowego
- całka ogólna równania różniczkowego
- całka szczególna równania różniczkowego
- rozwiązanie osobliwe równania różniczkowego

Przykład 1

Niech

$$x = x(t) \tag{P1}$$

Równanie

$$x' = v\,, \tag{P2}$$

gdzie v = *const*, jest równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu. Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest funkcja

$$x = \int v\mathrm{d}t + C \tag{P3}$$

czyli

$$x = vt + C \tag{P4}$$

Niech na rozwiązanie (P4) będzie nałożony następujący warunek początkowy

$$x(0) = x_0 \tag{P5}$$

Podstawiamy warunek początkowy (5) do rozwiązania ogólnego (P4) i dostajemy

$$x_0 = v \cdot 0 + C \tag{P6}$$

Stąd

$$C = x_0 \tag{P7}$$

Rozwiązanie szczególne spełniające zarówno równanie (P2) jak i warunek początkowy (P6) ma postać

$$x = x_0 + vt \tag{P8}$$

co jest łatwo sprawdzić. Podstawiamy (P8) do (P2) i dostajemy

$$v = v \tag{P9}$$

Podstawienie $t = 0$ do (P8) daje

$$x = x_0 \tag{P10}$$

Najpierw zajmiemy się równaniami, które można sprowadzić do postaci

$$y' = F(x, y) \tag{1.4}$$

Równanie typu (1) będziemy rozwiązywać przy warunku początkowym

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.5}$$

Przykłady równań dających się sprowadzić do postaci (1.4)

$$yy' + xy - 3 = 0 \tag{1.6}$$

$$y' + 5y^3 - \sin x = 0 \tag{1.7}$$

itp.

2. Metoda łamanych Eulera

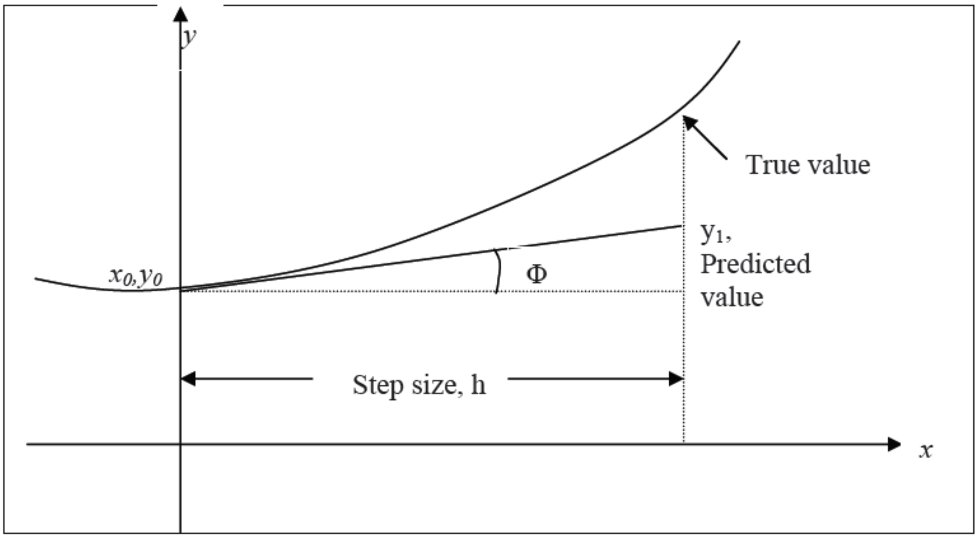


Figure 1. Graphical interpretation of the first step of Euler's method

Dane równanie różniczkowe

$$y' = F(x, y) \tag{2.1}$$

Warunek początkowy

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.2}$$

Wzór rekurencyjny na rozwiązanie przybliżone równania (1)

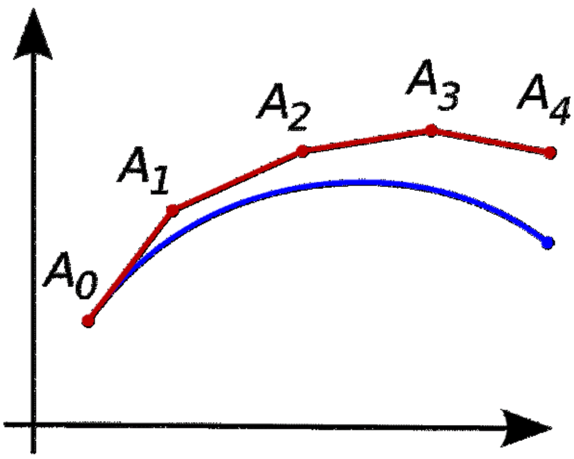
$$y(x_{i+1}) = y_{i+1} = y_i + h_i F(x_i, y_i) \tag{2.3}$$

gdzie

$$h_i = x_{i+1} - x_i \tag{2.4}$$

Błąd lokalny metody jest rzędu h^2

$$e = o(h^2) \tag{2.5}$$



PRZYKŁAD 1

Dane jest równanie różniczkowe $y' - y + x = 0$ oraz warunek początkowy $y(0) = 1$. Wyznaczyć wartość funkcji $y(x)$ w punkcie $x_k = 0,2$ dzieląc przedział [0; 0,2] na $n = 2$ części. Zastosować wzór Eulera $y_{i+1} = y_i + h \cdot F(x_i, y_i)$.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

$$y' = y - x = F(x, y)$$

Obliczamy krok: $h = \dfrac{x_k - x_0}{n} = \dfrac{0,2 - 0}{2} = 0,1$.

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 1$$

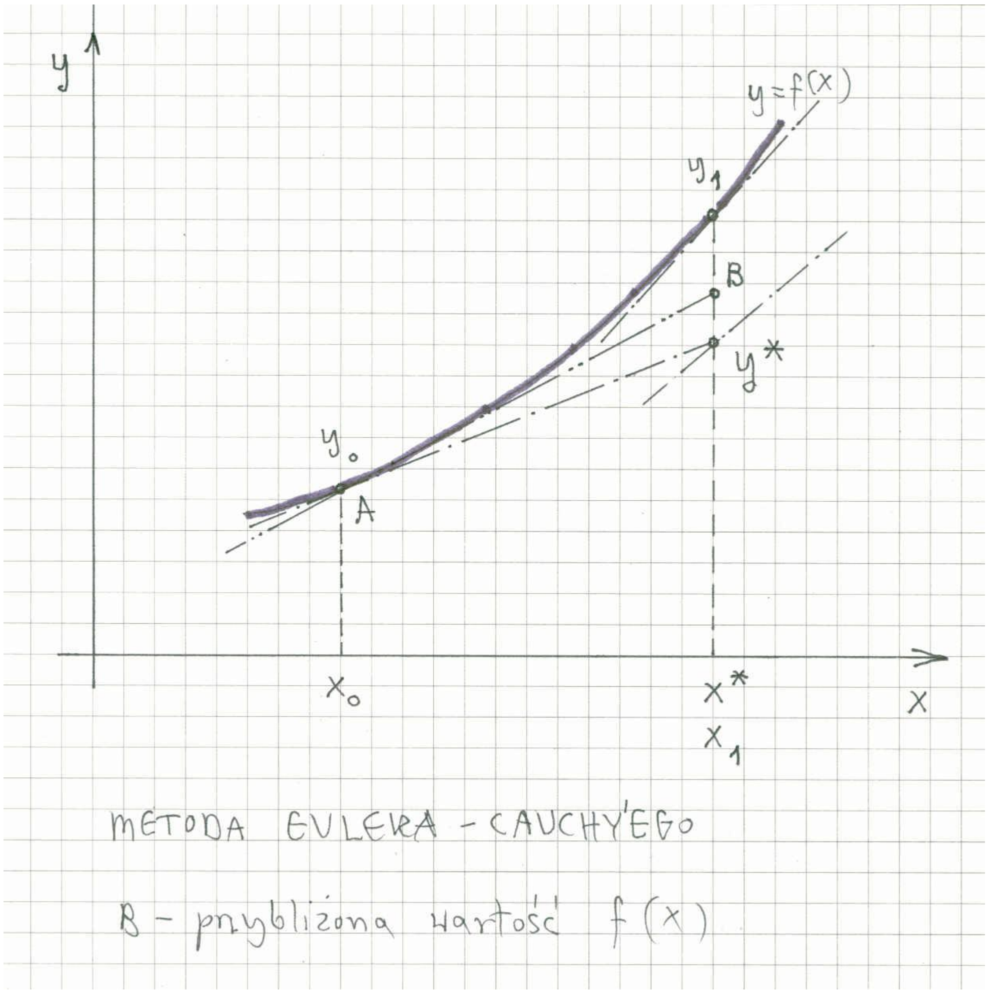
$$y_1 = y_0 + h \cdot F(x_0, y_0) = y_0 + h \cdot (y_0 - x_0) = 1 + 0,1 \cdot (1 - 0) = 1,1$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0,1 = 0,1$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot F(x_1, y_1) = y_1 + h \cdot (y_1 - x_1) = 1,1 + 0,1 \cdot (1,1 - 0,1) = 1,2$$

$$x_2 = x_1 + h = 0,1 + 0,1 = 0,2 = x_k$$

3. Ulepszona metoda Eulera (metoda Eulera-Cauchy'ego, metoda Heuna)



$$y' = F(x, y) \tag{3.1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{3.2}$$

$$x^* = x_{i+1} = x_i + h \tag{3.3}$$

$$y^* = y_i + hF(x_i, y_i) \tag{3.4}$$

$$m^* = F(x^*, y^*) \tag{3.5}$$

$$y_{i+1} = y_i + 0{,}5h\left[F(x_i, y_i) + m^*\right] \tag{3.6}$$

Błąd lokalny metody jest rzędu h^3

$$e = o(h^3) \tag{3.7}$$

W metodzie przyjęto, że współczynnik kierunkowy siecznej przechodzącej przez punkty $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ jest średnią arytmetyczną współczynników kierunkowych stycznych w punktach (x_i, y_i) oraz (x_{i+1}, y_{i+1}).

4. Metoda Taylora

Równanie postaci

$$\dot{y} = f(y, x) \tag{4.1}$$

z warunkiem początkowym

$$y(x_0) = y_0 \tag{4.2}$$

można rozwiązać wykorzystując rozwinięcie funkcji $y(x)$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu x

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta x\dot{y} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\ddot{y} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\dddot{y} + \cdots \tag{4.3}$$

Szereg (4.3) można przedstawić w wygodniejszej postaci

$$y_{i+1} = y_i + h\dot{y}_i + \frac{h^2}{2}\ddot{y}_i + \frac{h^3}{6}\dddot{y}_i + \cdots \tag{4.4}$$

gdzie

$$h = \Delta x = x_{i+1} - x_i \tag{4.5}$$

$$y_i = y(x_i) \tag{4.6}$$

Pochodną drugiego rzędu występującą w przybliżeniu (4.4) otrzymujemy różniczkując zależność (4.1)

$$\ddot{y} = \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial x} \tag{4.7}$$

Pochodną trzeciego rzędu wyznaczamy różniczkując prawą stronę zależności (4.7), itd. Wykorzystując warunek początkowy (4.2) obliczamy y_1, mając y_1 wyznaczamy y_2, itd., aż do poszukiwanej wartości y_n.

5. Metoda Rungego-Kutty

$$y' = F(x, y) \tag{5.1}$$

Warunek początkowy

$$y(x_0) = y_0 \tag{5.2}$$

Metoda ta polega na przybliżeniu szeregu *Taylora* dla $y(x_i + h) = y_{i+1}$ kombinacją liniową wartości pierwszej pochodnej funkcji y obliczonych dla odpowiednio dobranych punktów x. W ten sposób unika się konieczności wyznaczania pochodnych wyższych rzędów funkcji y w punkcie x_i.

Poszukujemy $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, A_1, A_2, \ldots$, tak aby

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=1}^{n} m_j A_j \qquad (5.3)$$

gdzie:

$$m_1 = F(x_i, y_i) \qquad (5.4)$$

$$m_2 = F(x_i + a_1 h, y_i + b_1 h m_1) \qquad (5.5)$$

$$m_3 = F(x_i + a_2 h, y_i + b_2 h m_1 + b_3 h m_2) \qquad (5.6)$$

$$\vdots$$

Dla $n = 2$ zależność (5.3) upraszcza się do

$$y_{i+1} = y_i + h(m_1 A_1 + m_2 A_2) \qquad (5.7)$$

Zajmiemy się wyznaczeniem wartości a_1, b_1, A_1, A_2 dla tego przypadku. Dokładne rozwiązanie równania (5.1) oznaczymy przez $y(x)$ i rozwiniemy je w szereg *Taylora* w otoczeniu punktu x_i z dokładnością do drugich pochodnych

$$y(x_i + h) \cong y(x_i) + \frac{y'(x_i)}{1!} h + \frac{y''(x_i)}{2!} h^2 \qquad (5.8)$$

Z równania (5.1) wyznaczamy drugą pochodną funkcji $y(x)$

$$y''(x) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + y'(x)\frac{\partial F}{\partial y} \qquad (5.9)$$

Do rozwinięcia (5.8) podstawiamy równania (5.9), (5.1) i (5.4)

$$y(x_i + h) \cong y(x_i) + hF(x_i, y_i) + h^2\left[\frac{1}{2}\frac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial x} + \frac{1}{2} m_1 \frac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial y}\right] \qquad (5.10)$$

Z zależności (5.7) po uwzględnieniu wzorów (5.4) i (5.5) dostajemy

$$\begin{aligned} y(x_i + h) &= y_i + h m_1 A_1 + h m_2 A_2 = \\ & y(x_i) + hA_1 F(x_i, y_i) + hA_2 F(x_i + a_1 h, y_i + b_1 h m_1) \end{aligned} \qquad (5.11)$$

Funkcję $F(x_i + a_1 h, y_i + b_1 h m_1)$ rozwijamy w szereg *Taylora* z dokładnością do pierwszych pochodnych

$$\begin{aligned} F(x_i + a_1 h, y_i + b_1 h m_1) &\cong F(x_i, y_i) + \\ & \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial x} a_1 h + \frac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial y} b_1 h m_1\right] \end{aligned} \qquad (5.12)$$

Podstawienie (5.12) do (5.11) daje

$$\begin{aligned} y(x_i + h) &= y(x_i) + h[A_1 F(x_i, y_i) + A_2 F(x_i, y_i)] + \\ & h^2\left[a_1 A_2 \frac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial x} + b_1 m_1 A_2 \frac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial y}\right] \end{aligned} \qquad (5.13)$$

Równania (5.10) i (5.13) będą tożsamościami, gdy

$$1 = A_1 + A_2 \qquad (5.14)$$

$$\frac{1}{2} = a_1 A_2 \qquad (5.15)$$

$$\frac{1}{2} = b_1 A_2 \qquad (5.16)$$

W układzie trzech równań (5.14)-(5.16) występują 4 niewiadome. Przyjmujemy $a_1 = 1$, stąd

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 \\ A_1 &= 0{,}5 \\ A_2 &= 0{,}5 \end{aligned} \qquad (5.17)$$

Po podstawieniu (5.17) do (5.5) i (5.7) dostajemy

$$\begin{aligned} m_1 &= F(x_i, y_i) \\ m_2 &= F(x_i + h, y_i + hm_1) \\ y_{i+1} &= y_i + h(0{,}5m_1 + 0{,}5m_2) \end{aligned} \qquad (5.18)$$

Błąd lokalny metody dla $n = 2$ (metoda drugiego rzędu) jest rzędu h^3.
Wzory (5.18) są tożsame z wzorami metody *Eulera-Cauchy'ego*.

W praktyce stosuje się wzory *Rungego-Kutty* wyższych rzędów, naczęściej czwartego rzędu.

Wzory trzeciego rzędu

$$\begin{aligned} m_1 &= F(x_i, y_i) \\ m_2 &= F\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}hm_1\right) \\ m_3 &= F(x_i + h, y_i - hm_1 + 2hm_2) \\ y_{i+1} &= y_i + \tfrac{h}{6}(m_1 + 4m_2 + m_3) \end{aligned} \qquad (5.19)$$

Błąd lokalny metody jest rzędu h^4.

Wzory czwartego rzędu

$$\begin{aligned} m_1 &= F(x_i, y_i) \\ m_2 &= F\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}hm_1\right) \\ m_3 &= F\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}hm_2\right) \\ m_4 &= F(x_i + h, y_i + hm_3) \\ y_{i+1} &= y_i + \tfrac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \end{aligned} \qquad (5.20)$$

Błąd lokalny metody jest rzędu h^5.

Zagadnienia brzegowe

1. Metoda iteracyjna – metoda strzałów

Rozwiążemy następujące zagadnienie brzegowe

$$F[x, y(x), y'(x), y''(x)] = 0 \tag{1.1}$$

$$y(0) = y_1 \tag{1.2}$$

$$y(a) = y_2 \tag{1.3}$$

Zakładamy, że

$$y'(0) = b \tag{1.4}$$

gdzie b może być dowolną wartością. Zagadnienie (1.1), (1.2) i (1.4) rozwiązujemy jako zagadnienie początkowe. W ogólności obliczona wartość y dla $x = a$ (oznaczymy ją jako y_a) będzie się różnić od y_2. Naszym zadaniem jest znalezienie takiej wartości b, aby warunek (1.3) był spełniony.

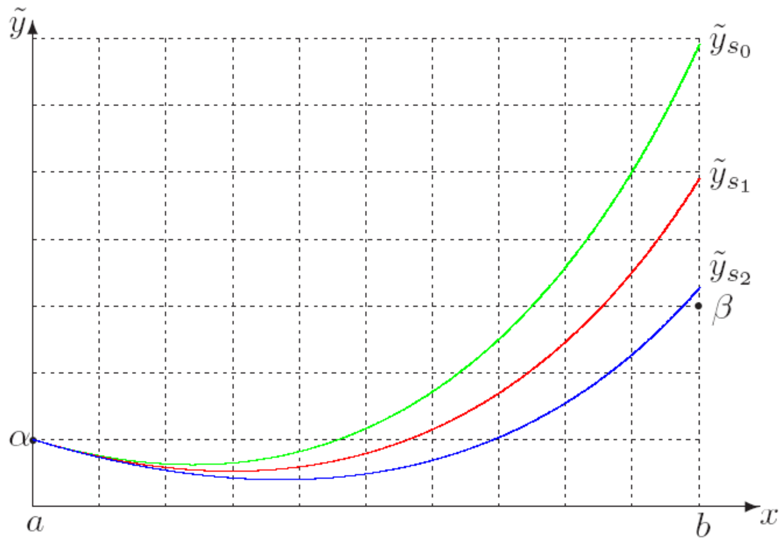


Figure 1. Illustration of the Simple Shooting Method

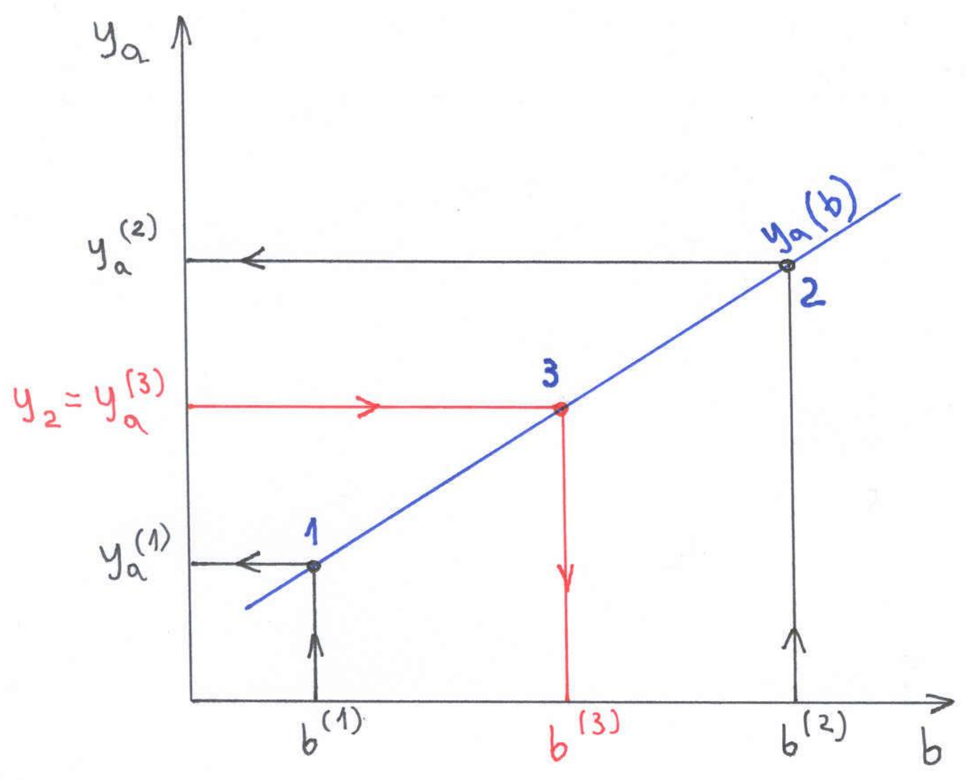
Wyznaczywszy dwie wartości y_a możemy trzecią wartość wyznaczyć z następującego równania interpolacyjnego (prosta)

$$y_a^{(3)} = y_a^{(2)} + \frac{y_a^{(2)} - y_a^{(1)}}{b^{(2)} - b^{(1)}}\left[b^{(3)} - b^{(2)}\right] \tag{1.5}$$

Poszukujemy takiego $b^{(3)}$, aby $y_a^{(3)} = y_2$, stąd

$$b^{(3)} = b^{(2)} + \frac{y_2 - y_a^{(2)}}{y_a^{(2)} - y_a^{(1)}}\left[b^{(2)} - b^{(1)}\right] \tag{1.6}$$

Wykorzystując $b^{(3)}$ obliczamy $y_a^{(3)}$ z równania (1.1). Gdy $y_a^{(3)}$ jeszcze zbyt mocno różni się od y_2, to wykonujemy następną iterację; obliczamy $b^{(4)}$ dla znanych $b^{(2)}$ i $b^{(3)}$.



2. Metoda różnic skończonych

Zajmiemy się równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu, liniowym

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x); \quad a \le x \le b \tag{2.1}$$

z warunkami brzegowymi

$$y(a) = \alpha \tag{2.2}$$

$$y(b) = \beta \tag{2.3}$$

Naszym celem będzie wyznaczenie $N - 1$ wartości funkcji wewnątrz przedziału $[a, b]$. Przedział $[a, b]$ dzielimy na N równych części o szerokości

$$h = \frac{b-a}{N} \tag{2.4}$$

<u>Pochodne występujące w równaniu (2.1) zastąpimy ilorazami różnicowymi centralnymi</u>

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \tag{2.5}$$

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \tag{2.6}$$

gdzie $y_i = y(x_i)$. Równanie różniczkowe (2.1) zastępujemy układem $N - 1$ równań różnicowych (dla węzłów leżących wewnątrz przedziału $[a, b]$).

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = r_i; \quad i = 1,2,\ldots,N-1 \tag{2.7}$$

gdzie:

$$y_0 = y(x_0) = \alpha \tag{2.8}$$

$$y_N = y(x_N) = \beta \tag{2.9}$$

$$p_i = p(x_i) \tag{2.10}$$

$$q_i = q(x_i) \tag{2.11}$$

$$r_i = r(x_i) \tag{2.12}$$

Po wymnożeniu równania (2.7) stronami przez h^2 i wykonaniu odpowiednich przekształceń dostajemy

$$\left(1 + \frac{h}{2} p_i\right) y_{i+1} + \left(-2 + h^2 q_i\right) y_i + \left(1 - \frac{h}{2} p_i\right) y_{i-1} = h^2 r_i; \quad i = 1,2,\ldots,N-1 \tag{2.13}$$

Po podstawieniu do (2.13) zależności (2.8) oraz (2.9) dostajemy dla $i = 1,2,\ldots,N-1$

$$\begin{gathered}
\left(-2 + h^2 q_1\right) y_1 + \left(1 + \frac{h}{2} p_1\right) y_2 = h^2 r_1 - \left(1 - \frac{h}{2} p_1\right)\alpha \\
\left(1 - \frac{h}{2} p_2\right) y_1 + \left(-2 + h^2 q_2\right) y_2 + \left(1 + \frac{h}{2} p_2\right) y_3 = h^2 r_2 \\
\left(1 - \frac{h}{2} p_3\right) y_2 + \left(-2 + h^2 q_3\right) y_3 + \left(1 + \frac{h}{2} p_3\right) y_4 = h^2 r_3 \\
\vdots \\
\left(1 - \frac{h}{2} p_{N-2}\right) y_{N-3} + \left(-2 + h^2 q_{N-2}\right) y_{N-2} + \left(1 + \frac{h}{2} p_{n-2}\right) y_{N-1} = h^2 r_{N-2}
\end{gathered} \tag{2.14}$$

$$\left(1-\frac{h}{2}p_{N-1}\right)y_{N-2}+\left(-2+h^2q_{N-1}\right)y_{N-1}=h^2r_{N-1}-\left(1+\frac{h}{2}p_{n-1}\right)\beta$$

Układ (2.14) można przedstawić w następującej postaci macierzowej

$$\mathbf{Ay}=\mathbf{b} \tag{2.15}$$

gdzie:

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} h^2r_1-\left(1-\frac{h}{2}p_1\right)\alpha \\ h^2r_2 \\ \vdots \\ h^2r_{N-2} \\ h^2r_{N-1}-\left(1+\frac{h}{2}p_{n-1}\right)\beta \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} Q_1 & P_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ R_2 & Q_2 & P_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & Q_3 & P_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & R_{N-2} & Q_{N-2} & P_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & R_{N-1} & Q_{N-1} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$$P_i=1+\frac{h}{2}p_i; \quad i=1,2,\ldots,N-2 \tag{2.19}$$

$$Q_i=-2+h^2q_i; \quad i=1,2,\ldots,N-1 \tag{2.20}$$

$$R_i=1-\frac{h}{2}p_i; \quad i=2,3,\ldots,N-1 \tag{2.21}$$

Macierz główna układu (2.15) jest trójdiagonalna – dzięki temu układ ten może być łatwo i szybko rozwiązany, np. metodą Thomasa.

Metoda kolokacji dla zagadnienia brzegowego

Zajmiemy się równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu, liniowym

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x); \quad a\le x\le b \tag{1}$$

z warunkami brzegowymi

$$y(a)=\alpha \tag{2}$$

$$y(b) = \beta \tag{3}$$

Założymy, że poszukiwane rozwiązanie można przedstawić w postaci

$$y(x) = \varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_k\varphi_k(x) \tag{4}$$

gdzie $\varphi_i(x),\ i = 0,1,2,\ldots,k$ są z góry obranymi liniowo niezależnymi funkcjami. Najczęściej funkcje te dobieramy tak, aby

$$\varphi_0(a) = \alpha \tag{5}$$

$$\varphi_0(b) = \beta \tag{6}$$

$$\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0,\ i = 1,2,\ldots,k \tag{7}$$

Przy założeniach (5)-(7) rozwiązanie (4) spełnia warunki brzegowe (2)-(3) dla dowolnych wartości poszukiwanych współczynników c_i. Residuum równania (1) ma postać

$$R(x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) - f(x) \tag{8}$$

Podstawienie dokładnego rozwiązania $y(x)$ do równania (8) prowadzi do

$$R(x) = 0 \tag{9}$$

dla dowolnej wartości x. Dla przybliżonego rozwiązania o postaci (4) będziemy wymagać, aby warunek (9) był spełniony dla skończonego, z góry założonego, zbioru punktów

$$x = x_1,\ x = x_2,\ldots,x = x_k \tag{10}$$

Współczynniki $c_1, c_2, \ldots, c_k$ można więc będzie wyznaczyć z układu równań

$$R(x_1) = 0,\ R(x_2) = 0,\ldots,R(x_k) = 0 \tag{11}$$

Metoda kolokacji - przykład 1

Dane jest równanie różniczkowe

$$y''(x) - 4y(x) = 0 \tag{1}$$

z warunkami brzegowymi

$$y(0) = 1 \tag{2}$$

$$y(1) = 0{,}5 \tag{3}$$

Założymy, że poszukiwane rozwiązanie można przedstawić w postaci

$$y(x) = \varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_k\varphi_k(x) \tag{4}$$

W dalszej analizie przyjmiemy $\underline{k = 3}$ oraz

$$\varphi_0(x) = 1 - 0{,}5x \tag{5}$$

$$\varphi_1(x) = x(1-x) \tag{6}$$

$$\varphi_2(x) = x^2(1-x) \tag{7}$$

$$\varphi_3(x) = x^3(1-x) \tag{8}$$

Równanie (5) jest równaniem prostej przechodzącej przez punkty $[0;1]$ oraz $[1;0{,}5]$. Natomiast funkcje $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ przyjmują wartość równą zeru dla $x = 0$ oraz $x = 1$. Tak więc, rozwiązanie (4) spełnia warunki brzegowe (2) i (3) dla dowolnej wartości współczynników c_i. Residuum równania (1) ma postać

$$R(x) = y''(x) - 4y(x) \tag{9}$$

Podstawienie dokładnego rozwiązania $y(x)$ do równania (9) prowadzi do

$$R(x) = 0 \tag{10}$$

dla dowolnego x. Dla przybliżonego rozwiązania postaci (4) będziemy wymagać, aby warunek (10) był spełniony dla z góry założonego zbioru punktów

$$x = x_1,\ x = x_2,\ x = x_3 \tag{11}$$

Współczynniki c_1, c_2, c_3 można więc będzie wyznaczyć z układu równań

$$R(x_1) = 0,\ R(x_2) = 0,\ R(x_3) = 0 \tag{12}$$

W naszym przypadku

$$R(x) = -a_0 + c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 \tag{13}$$

gdzie

$$a_0 = 4 - 2x \tag{14}$$

$$a_1 = -2 - 4x + 4x^2 \tag{15}$$

$$a_2 = 2 - 6x - 4x^2 + 4x^3 \tag{16}$$

$$a_3 = 6x - 12x^2 - 4x^3 + 4x^4 \tag{17}$$

Założymy następnie

$$x_1 = 0,25 \tag{18}$$

$$x_2 = 0,5 \tag{19}$$

$$x_3 = 0,75 \tag{20}$$

Po podstawieniu (14)-(17) oraz kolejno (18)-(20) do prawej strony (13) i wykorzystaniu (12) dostajemy układ równań

$$-16c_1 + 20c_2 + 45c_3 = 224 \tag{21}$$

$$-12c_1 - 6c_2 - c_3 = 12 \tag{22}$$

$$-176c_1 - 196c_2 - 171c_3 = 160 \tag{23}$$

z którego wyznaczamy

$$c_1 = -1,286079182 \tag{24}$$

$$c_2 = 0,627330779 \tag{25}$$

$$c_3 = -0,331034482 \tag{26}$$

W tabeli poniżej przedstawiono różnice pomiędzy wartościami uzyskanymi z rozwiązania dokładnego (y_d) i rozwiązania uzyskanego metodą kolokacji (y).

x	y	y_d - y
0	1	0
0,1	0,839601	-0,000627
0,2	0,712183	-0,000564
0,3	0,613189	-0,000365
0,4	0,538853	-0,000229
0,5	0,486207	-0,000166
0,6	0,453075	-0,000111
0,7	0,438078	-0,000012
0,8	0,440628	+0,000121
0,9	0,460934	-0,000187
1,0	0,500000	0