Metody Eulera i Eulera-Cauchy'ego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych

$$y'(x,y) := \frac{y-3}{x^2+1} \qquad (1)$$

Rozwiązanie dokładne równania (1)

$$y(x,C1) := 3 + C1\cdot\exp(\mathrm{atan}(x)) \qquad (2)$$

Sprawdzenie:

$$\frac{\frac{d}{dx}y(x,C1)}{y(x,C1)-3} \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{x^2+1}$$

Warunek początkowy

$x_0 := 0 \qquad yn_0 := 1$

Wyznaczenie wartości stałej dowolnej C1

$C1 := 0$

Given

$yn_0 = 3 + C1\cdot\exp(\mathrm{atan}(x_0))$

$C1 := \mathrm{Find}(C1) \qquad C1 = -2$

Rozwiązanie numeryczne

$h := 0.2 \qquad N := 20$

$i := 0..N \qquad x_i := h\cdot i \qquad ya_i := y(x_i, C1)$

Metoda Eulera

$i := 0..N-1$

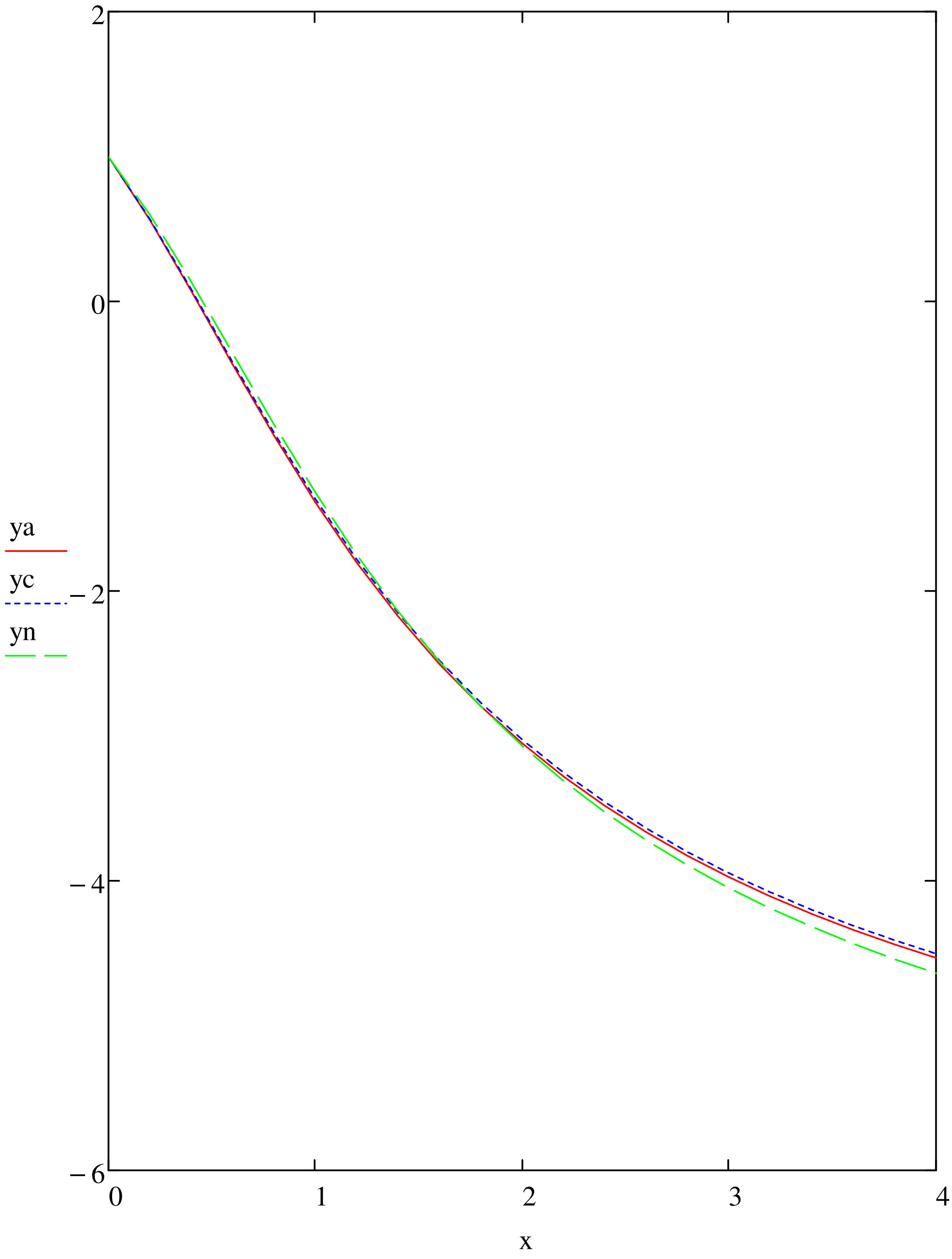
$yn_{i+1} := yn_i + h\cdot y'(x_i, yn_i)$

Metoda Eulera-Cauchy'ego

$$
yc := \left|
\begin{array}{l}
yc_0 \leftarrow yn_0 \\
\text{for } i \in 0..N-1 \\
\quad \left| \begin{array}{l}
yG \leftarrow yc_i + h \cdot y'(x_i, yc_i) \\
m \leftarrow y'(x_{i+1}, yG) \\
yc_{i+1} \leftarrow yc_i + 0.5 \cdot h \cdot \left(y'(x_i, yc_i) + m\right)
\end{array} \right. \\
yc
\end{array}
\right.
$$

augment(x , ya , yc , yn) =

	0	1	2	3
0	0	1	1	1
1	0.2	0.564	0.569	0.6
2	0.4	0.074	0.086	0.138
3	0.6	-0.433	-0.417	-0.355
4	0.8	-0.927	-0.907	-0.848
5	1	-1.387	-1.364	-1.318
6	1.2	-1.803	-1.779	-1.749
7	1.4	-2.174	-2.15	-2.139
8	1.6	-2.503	-2.478	-2.486
9	1.8	-2.794	-2.769	-2.794
10	2	-3.051	-3.026	-3.067
11	2.2	-3.28	-3.253	-3.31
12	2.4	-3.483	-3.456	-3.526
13	2.6	-3.664	-3.637	-3.719
14	2.8	-3.827	-3.8	-3.892
15	3	-3.974	-3.946	-4.048
16	3.2	-4.107	-4.079	-4.189
17	3.4	-4.227	-4.199	-4.317
18	3.6	-4.337	-4.309	-4.434
19	3.8	-4.438	-4.409	-4.54
20	4	-4.531	-4.501	-4.638


2
0
−2
−4
−6
0
1
2
3
4
x
ya
yc
yn

Metoda Taylora - przykład

Rozwiązać równanie różniczkowe $y' = 2\,y^2\,x$ z warunkiem początkowym $y(0) = 1$

$N := 25 \qquad x_0 := 0 \qquad x_N := 0.5 \qquad h := \frac{x_N - x_0}{N} \qquad h = 0.02$

$i := 1 .. N-1 \qquad x_i := h \cdot i$

$$
y := \left|\begin{array}{l}
y_0 \leftarrow 1 \\
\text{for } i \in 0 .. N-1 \\
\quad \left|\begin{array}{l}
y'_i \leftarrow 2\cdot(y_i)^2 \cdot x_i \\
y''_i \leftarrow 4\cdot y_i \cdot y'_i \cdot x_i + 2\cdot(y_i)^2 \\
y'''_i \leftarrow 24\cdot(y_i)^2 \cdot y'_i \cdot (x_i)^2 + 16\cdot(y_i)^3 \cdot x_i + 4\cdot y_i \cdot y'_i \\
y_{i+1} \leftarrow y_i + h\cdot y'_i + \frac{h^2}{2}\cdot y''_i + \frac{h^3}{6}\cdot y'''_i
\end{array}\right. \\
y
\end{array}\right.
$$

$D(X, Y) := 2\cdot Y^2 \cdot X$

$Y_0 := 1$

$RK := \mathrm{rkfixed}(Y, x_0, x_N, N, D)$

$\text{augment}(RK, x, y) =$

	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	0.02	1.0004	0.02	1.0004
2	0.04	1.0016	0.04	1.0016
3	0.06	1.0036	0.06	1.0036
4	0.08	1.0064	0.08	1.0064
5	0.1	1.0101	0.1	1.0101
6	0.12	1.0146	0.12	1.0146
7	0.14	1.02	0.14	1.02
8	0.16	1.0263	0.16	1.0263
9	0.18	1.0335	0.18	1.0335
10	0.2	1.0417	0.2	1.0417
11	0.22	1.0509	0.22	1.0509
12	0.24	1.0611	0.24	1.0611
13	0.26	1.0725	0.26	1.0725
14	0.28	1.0851	0.28	1.0851
15	0.3	1.0989	0.3	1.0989
16	0.32	1.1141	0.32	1.1141
17	0.34	1.1307	0.34	1.1307
18	0.36	1.1489	0.36	1.1489
19	0.38	1.1688	0.38	1.1688
20	0.4	1.1905	0.4	1.1905
21	0.42	1.2142	0.42	1.2142
22	0.44	1.2401	0.44	1.2401
23	0.46	1.2684	0.46	1.2684
24	0.48	1.2994	0.48	1.2994
25	0.5	1.3333	0.5	1.3333

Przykład 4

Rozwiązać równanie różniczkowe y'(x, y) = 1.2 - xy, przy warunku początkowym y(0) = 1, wykorzystując poniższe wzory Rungego-Kutty drugiego rzędu:

$m_1 = F(x_i, y_i)$
$m_2 = F(x_i + h, y_i + hm_1)$
$y_{i+1} = y_i + h(0.5m_1 + 0.5m_2)$

Wyznaczyć wartość funkcji y(x) w punkcie $x_3 := 0.3$ wykonując $n := 3$ kroki.

<u>Rozwiązanie</u>

Równanie różniczkowe

$$y'(x,y) := 1.2 - x \cdot y$$

Definicja funkcji F(x,y)

$$F(x,y) := y'(x,y) = 1.2 - x \cdot y$$

Warunek początkowy

$$x_0 := 0 \qquad y_0 := 1$$

Wielkość kroku (przyrostu Δx = h)

$$h := \frac{x_3 - x_0}{n} = 0.1000$$

Wyznaczanie wartości argumentu x w punkcie 1

$$x_1 := x_0 + h = 0.1000$$

Wyznaczanie wartości m_1 oraz m_2 (w kolejnych krokach m_1 oraz m_2 przyjmują inne wartości!)

$$m_1 := F(x_0, y_0)$$

$$m_1 := 1.2 - x_0 \cdot y_0 = 1.2000$$

$$m_2 := F(x_0 + h, y_0 + h \cdot m_1)$$

$$m_2 := 1.2 - (x_0 + h) \cdot (y_0 + h \cdot m_1) = 1.0880$$

Obliczanie wartości funkcji y(x) w punkcie 1

$$y_1 := y_0 + h \cdot (0.5 \cdot m_1 + 0.5 \cdot m_2) = 1.1144$$

Wyznaczanie wartości funkcji y(x) w punkcie 2

$x_2 := x_1 + h = 0.2000$

$m_1 := F(x_1, y_1)$

$m_1 := 1.2 - x_1 \cdot y_1 = 1.0886$

$m_2 := F(x_1 + h, y_1 + h \cdot m_1)$

$m_2 := 1.2 - (x_1 + h) \cdot (y_1 + h \cdot m_1) = 0.9553$

$y_2 := y_1 + h \cdot (0.5 \cdot m_1 + 0.5 \cdot m_2) = 1.217$

Wyznaczanie wartości funkcji y(x) w punkcie 3

$x_3 := x_2 + h = 0.3000$

$m_1 := F(x_2, y_2)$

$m_1 := 1.2 - x_2 \cdot y_2 = 0.9567$

$m_2 := F(x_2 + h, y_2 + h \cdot m_1)$

$m_2 := 1.2 - (x_2 + h) \cdot (y_2 + h \cdot m_1) = 0.8063$

$y_3 := y_2 + h \cdot (0.5 \cdot m_1 + 0.5 \cdot m_2) = 1.305$

Rozwiązanie równania za pomocą funkcji rkfixed

$$\mathrm{rkfixed}(1, 0, 0.3, 3, F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & 1.1146 \\ 0.2 & 1.217 \\ 0.3 & 1.3054 \end{pmatrix}$$

Wyniki uzyskane za pomoca funkcji rkfixed są dokładniejsze z powodu użycia w niej wzorów 4 rzędu.

Funkcja **rkfixed** - 1

<u>Zastosowanie</u>

Rozwiązywanie zagadnień początkowych dla:

- pojedynczego równania pierwszego rzędu
- układu równań pierwszego rzędu
- pojedynczego równania wyższego rzędu
- układu równań wyższych rzędów

<u>Składnia</u>

$$\mathbf{Z} := rkfixed(\mathbf{y}, x1, x2, n, \mathbf{D})$$

y - wektor wartości początkowych; liczba jego składowych zależy od rzędu rozwiązywanych równań i ich liczby, np. dla układu trzech równań pierwszego rzędu, wektor ten ma trzy składowe - wartości funkcji dla $x = x1$.

$x1$, $x2$ - wartości x dla początku i końca przedziału, dla którego wyznaczane jest rozwiązanie

n - liczba równoodległych punktów, dla których obliczane są wartości funkcji

$\mathbf{D}(x, \mathbf{y})$ - wektor zawierający wyrażenia na pochodne poszukiwanych funkcji (wyznaczone z równań), np. dla równania drugiego rzędu $\mathbf{D}(x,\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{bmatrix}$,

a dla dwóch równań pierwszego rzędu $\mathbf{D}(x,\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{bmatrix}$

Z - macierz zawierająca w pierwszej kolumnie wartości (argumentu) x, dla których wyznaczono wartości funkcji, a w następnych kolumnach wartości funkcji oraz, dla równań wyższych rzędów, wartości ich pochodnych (do rzędu k - 1, gdzie k to rząd równania)

Metoda Rungego-Kutty dla pojedynczego zagadnienia początkowego

<u>Przykład</u>

Rozwiązać równanie różniczkowe

y' = - 2xy + 4x (1)

z warunkiem początkowym

y(0) = 3. (2)

Rozwiązanie przybliżone metodą Rungego-Kutty

$y_0 := 3$ $D(x,y) := -2 \cdot x \cdot y + 4 \cdot x$

$xy\_rk := rkfixed(y, 0, 2, 10, D)$

xy_rk - to macierz wartości x i odpowiadających im obliczonych wartości y(x)

y - to wektor wartości początkowych (w przypadku pojedynczego równania jest to skalar ze wskaźnikiem "0", tj. y_0)

0, 2, 10 - to kolejno początek przedziału, dla którego wyznaczamy wartości y(x), koniec tego przedziału oraz liczba obliczanych wartości y(x)

D(x,y) - to prawa strona rozwiązywanego równania napisanego w formie (1)

Dokładne rozwiązanie równania (1) z warunkiem (2) to funkcja

$$ya(x) := 2 + \exp\left(-x^2\right) \qquad (3)$$

$i := 0 .. 10 \qquad \Delta x := 0.2 \qquad x_i := i \cdot \Delta x$

$ROZW := \mathrm{augment}(xy\_rk, ya(x))$

ROZW =

	0	1	2
0	0	3	3
1	0.2	2.961	2.961
2	0.4	2.852	2.852
3	0.6	2.698	2.698
4	0.8	2.527	2.527
5	1	2.368	2.368
6	1.2	2.237	2.237
7	1.4	2.141	2.141
8	1.6	2.077	2.077
9	1.8	2.039	2.039
10	2	2.018	2.018

W kolumnie nr 2 umieszczone są dokładne wartości funkcji y(x).

Przekształcanie równania różniczkowego czwartego rzędu

$$y^{IV} - 2k^2 y'' + k^4 y = 0 \qquad (1)$$

do postaci wymaganej przez funkcję **rkfixed**.

Definiujemy funkcje

$$\begin{aligned} y_0 &= y \\ y_1 &= y' \\ y_2 &= y'' \\ y_3 &= y''' \end{aligned} \qquad (2)$$

Kolejno różniczkujemy stronami równania (2)

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dt} &= y' = y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= y'' = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= y''' = y_3 \\ \frac{dy_3}{dt} &= y^{IV} = 2k^2 y_2 - k^4 y_0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Ostatecznie otrzymujemy układ 4 równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dt} &= y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_3 \\ \frac{dy_3}{dt} &= 2k^2 y_2 - k^4 y_0 \end{aligned} \qquad \text{stąd} \qquad D(t, y) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 2k^2 y_2 - k^4 y_0 \end{bmatrix}$$

Solve $y'''' - 2\cdot k^2\cdot y'' + k^4\cdot y = 0$ $\quad k := 3$

$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ <— Define initial conditions

$D(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 2\cdot k^2\cdot y_2 - k^4\cdot y_0 \end{bmatrix}$

<— First derivative

<— Second derivative

<— Third derivative

<— Fourth derivative

Z := rkfixed(y , 0 , 5 , 100 , D) <— Evaluate solution at 100 points between t=0 and t=5.

Z =

t	y(t)	y'(t)	y''(t)	y'''(t)
0	0	1	2	3
0.05	0.053	1.104	2.195	4.776
0.1	0.111	1.221	2.477	6.543
0.15	0.175	1.354	2.85	8.358
0.2	0.246	1.507	3.315	10.274
0.25	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Example 4: Solving a higher order differential equation.

Przekształcenie układu równań do postaci wymaganej przez funkcję **rkfixed**

Układ dwóch równań drugiego rzędu sprowadzamy do układu czterech równań pierwszego rzędu.

$$\begin{cases} u'' = 2v \\ v'' = 4v - 2u \end{cases} \tag{1}$$

$$u = y_0 \tag{2a}$$

$$u' = y_1 = \frac{dy_0}{dx} \tag{2b}$$

$$u'' = \frac{dy_1}{dx} \tag{2c}$$

$$v = y_2 \tag{2d}$$

$$v' = y_3 = \frac{dy_2}{dx} \tag{2e}$$

$$v'' = \frac{dy_3}{dx} \tag{2f}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 4y_2 - 2y_0 \end{cases} \tag{3a}$$

$$\begin{cases} u(0) = y_0(0) \\ u'(0) = y_1(0) \\ v(0) = y_2(0) \\ v'(0) = y_3(0) \end{cases} \tag{3b}$$

Solve $u'' = 2v$ $v'' = 4v - 2u$ subject to initial conditions: $u(0) = 1.5$ $u'(0) = 1.5$ $v(0) = 1$ $v'(0) = 1$

$$y := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow u(0) \\ \leftarrow u'(0) \\ \leftarrow v(0) \\ \leftarrow v'(0) \end{array}$$

<- Define vector of initial conditions.

$$D(x, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ 2 \cdot y_2 \\ y_3 \\ 4 \cdot y_2 - 2 \cdot y_0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} u' \\ u'' \\ v' \\ v'' \end{array}$$

<- Define vector of first and second derivatives.

$Z := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 1, 100, D)$

Z =

x	u(x)	u'(x)	v(x)	v'(x)
0	1.5	1.5	1	1
0.01	1.515	1.52	1.01	1.01
0.02	1.53	1.54	1.02	1.02
0.03	1.546	1.561	1.03	1.03
0.04	1.562	1.582	1.041	1.041
0.05	1.578	1.603	1.051	1.051

Example 6: Solving a system of second order linear differential equations.