Metoda szeregów potęgowych dla równań różniczkowych zwyczajnych liniowych

Równanie różniczkowe zwyczajne liniowe drugiego rzędu ma postać

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f(x)\frac{du}{dx} + g(x)u = h(x) \qquad (1)$$

Załóżmy, że rozwiązanie równania (1) może być przedstawione w postaci szeregu potęgowego

$$u(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \qquad (2)$$

Ponieważ funkcja dana równaniem (2) ma być rozwiązaniem równania (1), to po jej podstawianiu do (2) powinniśmy otrzymać tożsamość.

Pochodne funkcji $u(x)$ można obliczyć różniczkując szereg (2) wyraz po wyrazie

$$\frac{du}{dx} = b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n (x-a)^{n-1} \qquad (3)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2b_2 + 6b_3(x-a) + 12b_4(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n (x-a)^{n-2} \qquad (4)$$

Jeżeli współczynniki równania (1), tzn. funkcje $f(x)$, $g(x)$ oraz $h(x)$ można także rozwinąć w szereg postaci (2) w otoczeniu punktu $x = a$, to po podstawieniu rozwinięć (2), (3), (4) oraz rozwinięć funkcji $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ do (1) dostajemy

$$k_0 + k_1(x-a) + k_2(x-a)^2 + \cdots = 0 \qquad (5)$$

gdzie współczynniki $k_0, k_1, k_2, \ldots$ zależą od $b_0, b_1, b_2, \ldots$

Jeżeli równanie (5) ma być słuszne dla wszystkich wartości x (z rozpatrywanego przedziału zmienności x), to wszystkie współczynniki $k_0, k_1, k_2, \ldots$ muszą być jednocześnie równe zeru. Przyrównanie tych współczynników do zera pozwala na wyznaczenie wartości współczynników $b_0, b_1, b_2, \ldots$ poszukiwanego rozwiązania (1).

Można udowodnić, że jeżeli współczynniki równania (1), tzn. funkcje $f(x)$, $g(x)$ oraz $h(x)$ można rozwinąć w szereg potęgowy w otoczeniu punktu $x = a$, to również rozwiązanie równania (1) $u(x)$ może być rozwinięte w szereg potęgowy w otoczeniu tego punktu.

Przykłady

Przykład CM-204

Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego

$$y'' - xy' + y = 1 - \cos x \qquad (1)$$

z warunkami początkowymi

$$y(0) = 0 \qquad (2a)$$

$$y'(0) = 1 \qquad (2b)$$

w otoczeniu punktu $x = 0$.

Rozwiązanie

Równanie (1) jest równaniem liniowym o zmiennych współczynnikach, o ogólnej postaci

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad (3)$$

Rozwiniemy współczynniki równania (1) w szeregi potęgowe w otoczeniu punktu $x = 0$

$$p(x) = -x \qquad (4)$$

$$q(x) = 1 \qquad (5)$$

$$r(x) = 1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots \qquad (6)$$

Poszukujemy rozwiązania równania (1) w postaci następującego szeregu potęgowego

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \cdots \qquad (7)$$

Wyznaczamy z (7) pierwszą i drugą pochodną funkcji y

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots + nc_n x^{n-1} + \cdots \qquad (8)$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + \cdots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \cdots \qquad (9)$$

Szeregi (4)-(9) podstawiamy do równania (1)

$$\begin{aligned}&[2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + \cdots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \cdots] - x[c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots + nc_n x^{n-1} + \cdots]\\ &\quad + [c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \cdots] = \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots\right]\end{aligned} \qquad (10)$$

Przyrównujemy do siebie współczynniki stojące przy jednakowych potęgach x po obu stronach równania

$$x^0: \quad c_0 + 2c_2 = 0 \qquad (11a)$$

$$x^1: \quad 6c_3 = 0 \qquad (11b)$$

$$x^2: \quad -c_2 + 12c_4 = \frac{1}{2} \qquad (11c)$$

$$x^3: \quad -2c_3 + 20c_5 = 0 \qquad (11d)$$

$$x^4: \quad -3c_4 + 30c_6 = -\frac{1}{24} \qquad (11e)$$

$$x^5: \quad -4c_5 + 42c_7 = 0 \qquad (11f)$$

$$x^6: \quad -5c_6 + 56c_8 = \frac{1}{720} \qquad (11g)$$

Podstawiamy warunek początkowy (2a) do równania (7)

$$y(0) = 0 = c_0 + c_1 0 + c_2 0^2 + c_3 0^3 + \cdots + c_n 0^n + \cdots \qquad (12)$$

stąd

$$c_0 = 0 \qquad (13)$$

Warunek początkowy (2b) podstawiamy do (8) otrzymując

$$y'(0) = 1 = c_1 + 2c_2 0 + 3c_3 0^2 + 4c_4 0^3 + \cdots + nc_n 0^{n-1} + \cdots \qquad (14)$$

czyli

$$c_1 = 1 \qquad (15)$$

Z równania (11a) dostajemy

$$c_2 = -\frac{c_0}{2} = -\frac{0}{2} = 0 \qquad (16a)$$

z (11b)

$$c_3 = 0 \qquad (16b)$$

z (11c)

$$c_4 = \frac{1}{24} \qquad (16c)$$

z (11d)

$$c_5 = 0 \qquad (16d)$$

z (11e)

$$c_6 = \frac{-\frac{1}{24} + 3c_4}{30} = \frac{-\frac{1}{24} + 3 \cdot \frac{1}{24}}{30} = \frac{1}{360} \qquad (16e)$$

z (11f)

$$c_7 = 0 \qquad (16f)$$

z (11g)

$$c_8 = \frac{11}{40320} \qquad (16g)$$

Podstawiamy teraz współczynniki (13), (15) i (16) do równania (7) otrzymując przybliżone rozwiązanie zagadnienia początkowego (1)-(2) w postaci szeregu potęgowego

$$y(x) \approx x + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{360} + \frac{11x^8}{40320} \tag{17}$$

Przykład MM-78

Znaleźć rozwiązanie ogólne w postaci szeregu potęgowego następującego równania różniczkowego, w otoczeniu punktu $x = 0$.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 9u = 0 \tag{1}$$

Poszukujemy rozwiązania w postaci

$$u(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots \tag{2}$$

Druga pochodna prawej strony równania (2) ma postać

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2b_2 + 6b_3 x + 12b_4 x^2 + \cdots \tag{3}$$

Podstawiamy (2) i (3) do (1)

$$2b_2 + 6b_3 x + 12b_4 x^2 + \cdots + 9b_0 + 9b_1 x + 9b_2 x^2 + \cdots = 0 \tag{4}$$

Grupujemy wyrazy, w których x występuje w tej samej potędze

$$2b_2 + 9b_0 + (6b_3 + 9b_1)x + (12b_4 + 9b_2)x^2 + \cdots = 0 \tag{5}$$

Równanie (5) ma być spełnione tożsamościowo dla dowolnego x, dlatego współczynniki stojące przy x^n, dla $n = 0, 1, 2, ...$, muszą być równe zeru

$$x^0: \quad 2b_2 + 9b_0 = 0 \tag{6a}$$

$$x^1: \quad 6b_3 + 9b_1 = 0 \tag{6b}$$

$$x^2 : \quad 12b_4 + 9b_2 = 0 \tag{6c}$$

$$x^3 : \quad 20b_5 + 9b_3 = 0 \tag{6d}$$

Wyznaczamy z równań (6) współczynniki b_i, dla i = 2, 3, 4, ..., w zależności od współczynników b_0 oraz b_1

$$b_2 = -\frac{9}{2}b_0 \tag{7a}$$

$$b_3 = -\frac{3}{2}b_1 \tag{7b}$$

$$b_4 = -\frac{3}{4}b_2 = \frac{27}{8}b_0 \tag{7c}$$

$$b_5 = -\frac{9}{20}b_3 = \frac{27}{40}b_1 \tag{7d}$$

itd.

Podstawiamy teraz współczynniki (7) do rozwiązania (2)

$$\begin{aligned} u(x) &= b_0 + b_1 x + \left(-\frac{9}{2}b_0\right)x^2 + \left(-\frac{3}{2}b_1\right)x^3 + \left(\frac{27}{8}b_0\right)x^4 + \left(\frac{27}{40}b_1\right)x^5 + \cdots \\ &= b_0\left(1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + \cdots\right) + b_1\left(x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{27}{40}x^5 + \cdots\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Rozwiązanie ogólne (8) zawiera dwie stałe dowolne b_0 i b_1, które wyznacza się z dwóch warunków granicznych. Rozwiązanie to można przedstawić w nieco innej formie

$$\begin{aligned} u(x) &= b_0\left[1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \cdots\right] \\ &+ \frac{b_1}{3}\left[3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \cdots\right] \end{aligned} \tag{9}$$

Zauważamy, że

$$1-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}-\cdots=\sin 3x \qquad (10)$$

$$3x-\frac{(3x)^3}{3!}+\frac{(3x)^5}{5!}-\cdots=\cos 3x \qquad (11)$$

Otrzymujemy w ten sposób dokładne rozwiązanie równania (1)

$$u(x)=A\sin 3x+B\cos 3x \qquad (12)$$

gdzie stałe *A*, *B* wyznacza się z dwóch warunków granicznych.

Przykład MS-65

Metodą szeregów potęgowych znaleźć rozwiązanie równania

$$y''+\cos x\cdot y'-e^x y=0 \qquad (1)$$

spełniające warunki początkowe

$$y(0)=1 \qquad (2a)$$

$$y'(0)=0 \qquad (2b)$$

Rozwiązanie

Dla $x\in(-\infty,+\infty)$ funkcje cos *x* oraz $-e^x$ są rozwijalne odpowiednio w następujące szeregi potęgowe

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \qquad (3)$$

$$-e^x=-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}-\cdots \qquad (4)$$

Poszukujemy rozwiązania w postaci szeregu

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots \qquad (5)$$

Z (5) obliczamy

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots \qquad (6)$$

oraz

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \cdots \qquad (7)$$

Zależności (3)-(7) podstawiamy do (1)

$$\begin{aligned}&\left(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \cdots\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)\left(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots\right)\\ &+\left(-1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \cdots\right)\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\right) = 0\end{aligned} \qquad (8)$$

Stąd po wymnożeniu i uporządkowaniu

$$\begin{aligned}&\left(2a_2 + a_1 - a_0\right) + \left(6a_3 + 2a_2 - a_0 - a_1\right)x + \left(12a_4 - \frac{a_1}{2} + 3a_3 - \frac{a_0}{2} - a_1 - a_2\right)x^2\\ &\qquad + \left(20a_5 - a_2 + 4a_4 - a_3 - a_2 - \frac{a_1}{2} - \frac{a_0}{6}\right)x^3 + \cdots = 0\end{aligned} \qquad (9)$$

Równanie (9) jest spełnione dla każdego *x* wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z nawiasów stojących po lewej stronie (9) jest równy zeru. Z warunków początkowych (2) dostajemy

$$a_0 = 1 \qquad (10a)$$

$$a_1 = 0 \qquad (10b)$$

Wykorzystując (10) dostajemy kolejno z (9)

$$a_2 = \frac{1}{2} \qquad (11a)$$

$$6a_3 + 2a_2 - a_0 = 0 \qquad (11b)$$

stąd

$$a_3 = 0 \qquad (11c)$$

$$12a_4 - \frac{a_0}{2} - a_2 = 0 \tag{11d}$$

stąd

$$a_4 = \frac{1}{12} \tag{11e}$$

$$20a_5 - a_2 + 4a_4 - a_2 - \frac{a_0}{6} = 0 \tag{11f}$$

stąd

$$a_5 = \frac{1}{24} \tag{11g}$$

Rozwiązanie szczególne równania (1) z warunkami początkowymi (2) ma więc postać następującego szeregu

$$y(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + \cdots \tag{12}$$