Całkowanie numeryczne

Zadanie: obliczyć przybliżenie całki

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

używając wartości funkcji f(x) w punktach równoodległych. Przyjmujemy

$$x_0 = a \tag{2}$$

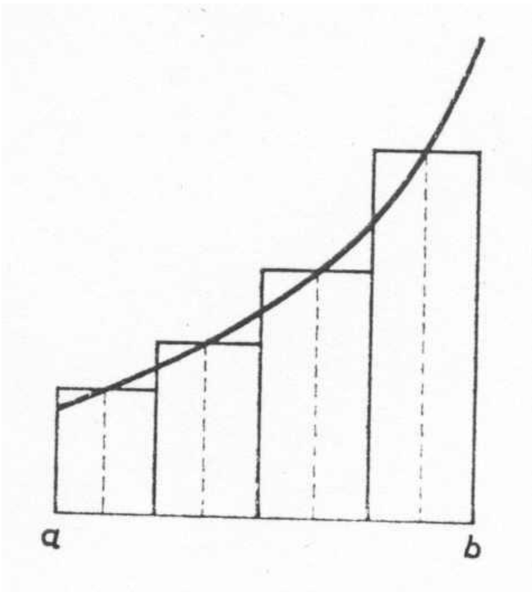
$$x_i = x_0 + ih, \qquad \text{gdzie } i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{3}$$

$$x_n = b \tag{4}$$

Stąd

$$n = (b-a)/h \tag{5}$$

<u>Metoda prostokątów</u>



$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \cong S_1 + S_2 + \cdots S_n = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1/2} \tag{6}$$

gdzie

$$y_{i-1/2} = \mathrm{f}\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

$$y_{1/2} = \mathrm{f}\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)$$

$$y_{1\frac{1}{2}} = \mathrm{f}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \tag{7}$$

itd.

$$S_1 = h \cdot y_{\frac{1}{2}}$$

$$S_2 = h \cdot y_{1\frac{1}{2}}$$

itd.

Błąd metody prostokątów

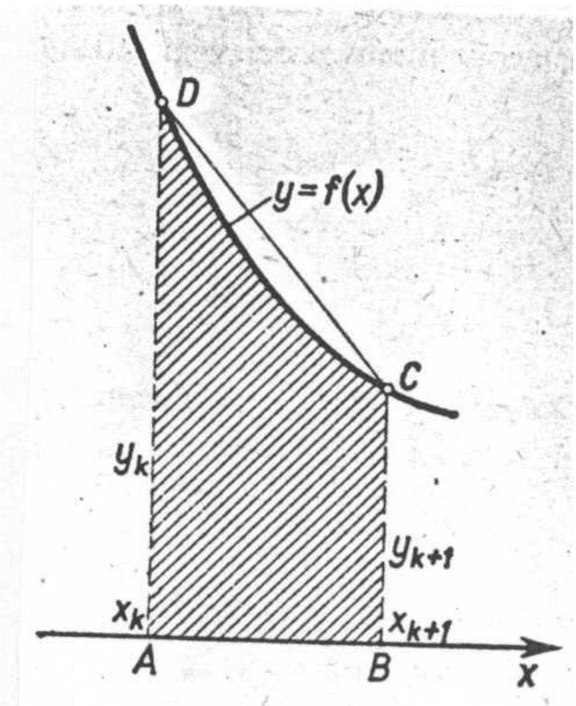
Zakładamy, że $\mathrm{f}(x)$ ma drugą pochodną ciągłą w przedziale <a, b>. Największą wartość funkcji $\left|\mathrm{f}''(x)\right|$ w przedziale <a, b> oznaczymy przez *M*. Można wykazać, że błąd przybliżenia wartości całki wartością prawej strony równania (6), zdefiniowany jako

$$\left|\mathrm{R}(h)\right| = \left| h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1/2} - \int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \right| \tag{8}$$

jest określony nierównością

$$\left|\mathrm{R}(h)\right| \le \frac{M(b-a)}{24} h^2 \tag{9}$$

<u>Metoda trapezów</u>



Rys. 186. Metoda trapezów. Pole obszaru zakreskowanego zastępujemy polem trapezu *ABCD*

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \cong S_1 + S_2 + \cdots S_n = h\left(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n\right) \qquad (10)$$

gdzie

$$S_1 = \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h$$

$$S_2 = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h$$

itd.

Błąd metody trapezów

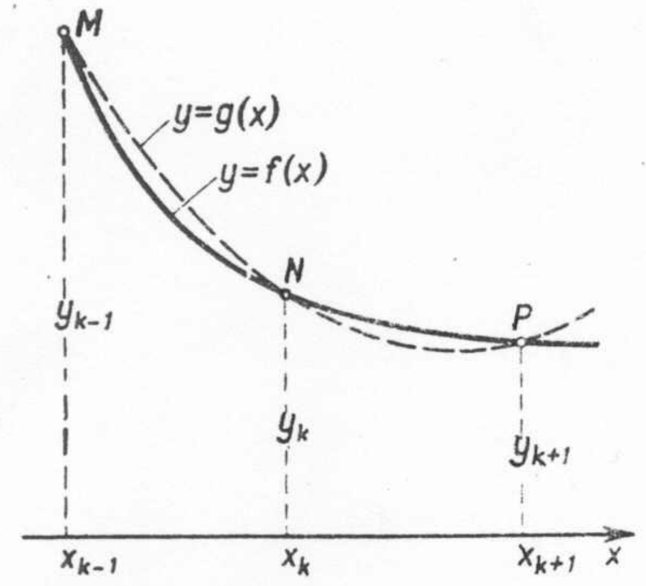
Zakładamy, że f(x) ma drugą pochodną ciągłą w przedziale <a, b>. Największą wartość funkcji $|\mathrm{f}''(x)|$ w przedziale <a, b> oznaczymy przez M. Można wykazać, że błąd przybliżenia wartości całki wartością prawej strony równania (10), zdefiniowany jako

$$|\mathrm{R}(h)| = \left| h\left(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n\right) - \int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \right| \qquad (11)$$

jest określony nierównością

$$\left|\mathrm{R}(h)\right| \leq \frac{M(b-a)}{12} h^2 \tag{12}$$

<u>Metoda *Simpsona* (metoda parabol)</u>



Rys. 187. Metoda Simpsona. — Pole obszaru określonego wykresem funkcji $f(x)$ i przedziałem $\langle x_{k-1}, x_{k+1}\rangle$ zastępujemy polem obszaru określonego wykresem trójmianu kwadratowego $g(x)$ i przedziałem $\langle x_{k-1}, x_{k+1}\rangle$

Krzywą f(x) zastępujemy łukami parabol drugiego stopnia. Założymy ponadto, że n jest liczbą parzystą. Zaznaczamy to zastępując n przez 2n. Punktów x_i (i = 0, 1, ..., 2n - 1, 2n) jest zatem 2n + 1.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \cong \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \mathrm{g}(x)\mathrm{d}x \tag{13}$$

gdzie

$$\mathrm{g}(x) = Ax^2 + Bx + C \tag{14}$$

Niech parabola g(x) przechodzi przez punkty M(x_{i-1}, y_{i-1}), N(x_i, y_i), P(x_{i+1}, y_{i+1}). Wówczas prawa strona równania (13) wynosi

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (Ax^2 + Bx + C)\mathrm{d}x = \tfrac{A}{3}\left(x_{i+1}^3 - x_{i-1}^3\right) + \tfrac{B}{2}\left(x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2\right) + C\left(x_{i+1} - x_{i-1}\right)$$

$$= \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{6}\left[2A\left(x_{i+1}^2 + x_{i+1}x_{i-1} + x_{i-1}^2\right) + 3B\left(x_{i+1} + x_{i-1}\right) + 6C\right]$$

$$= \tfrac{2h}{6}\left\{\begin{array}{l}\left[A\left(x_{i+1}^2 + x_{i-1}^2\right) + B\left(x_{i+1} + x_{i-1}\right) + 2C\right] \\ + 4\left[A\left(\dfrac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2}\right)^2 + B\left(\dfrac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2}\right) + C\right]\end{array}\right\} \tag{15}$$

czyli

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \mathrm{g}(x)\mathrm{d}x = \tfrac{h}{3}\left(y_{i+1} + y_{i-1} + 4y_i\right) = S_i \tag{16}$$

Przybliżona wartość całki $\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$ jest równa polu

$$S = S_1 + S_3 + S_5 + \cdots S_{2n-1}$$

gdzie

$$S_1 = \tfrac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

$$S_3 = \tfrac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right)$$

itd.

Dodając prawe strony równań (16) dla i = 1, 3, ..., 2n - 1 otrzymujemy wzór Simpsona

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \cong \tfrac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right) \tag{17}$$

Błąd metody Simpsona

Zakładając ciągłość czwartej pochodnej funkcji f(x) w przedziale <a, b> oraz oznaczając przez M największą wartość funkcji $\left|\mathrm{f}^{(4)}(x)\right|$ w tym przedziale można określić górną granicę błędu obliczania całki metodą *Simpsona*

$$\left|\mathrm{R}(h)\right| = \left|\tfrac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right) - \int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x\right| \tag{18}$$

za pomocą zależności

$$\left|\mathrm{R}(h)\right| \le \frac{M(b-a)}{180} h^4 \tag{19}$$

gdzie

$$h = \frac{b-a}{2n} \tag{20}$$

Ekstrapolacja Richardsona

Ekstrapolacja Richardsona polega na obliczaniu dokładniejszej wartości całki na podstawie dwóch wartości wyznaczonych numerycznie dla różnych wielkości podprzedziałów, na jakie podzielony jest przedział całkowania. Metodę można użyć wtedy, gdy dysponujemy wzorem na błąd metody całkowania.

<u>Zastosowanie ekstrapolacji Richardsona do metody trapezów przybliżonego całkowania</u>

Błąd metody trapezów wyraża wzór

$$R(h) \cong -\frac{(b-a)\overline{f''}}{12}h^2 \qquad (1)$$

Niech $I_1(h_1)$ będzie przybliżoną wartością całki wyznaczoną metodą trapezów, a $R_1(h_1)$ błędem obliczenia całki przy wielkości podprzedziału h_1. Wówczas dokładną wartość całki można wyznaczyć z równania

$$I \cong I_1(h_1) + R_1(h_1) \cong I_1(h_1) + ch_1^2 \qquad (2)$$

gdzie $c = -\frac{(b-a)\overline{f''}}{12}$ jest stałą (przy założeniu, że $\overline{f''}$ jest niezależne od wielkości podprzedziału *h*). Analogicznie, gdy $I_2(h_2)$ jest przybliżoną wartością całki wyznaczoną metodą trapezów, a $R_2(h_2)$ błędem obliczenia całki przy wielkości podprzedziału h_2, można napisać

$$I \cong I_2(h_2) + R_2(h_2) \cong I_2(h_2) + ch_2^2 \qquad (3)$$

Po przyrównaniu prawych stron równań (2) oraz (3) otrzymujemy

$$I_1(h_1) + ch_1^2 \cong I_2(h_2) + ch_2^2 \qquad (4)$$

Z równania (4) wyznaczamy *c*

$$c \cong \frac{I_2(h_2) - I_1(h_1)}{h_1^2 - h_2^2} \qquad (5)$$

Po podstawieniu prawej strony równania (5) do równania (3) dostajemy

$$I \cong I_2(h_2) + \frac{I_2(h_2) - I_1(h_1)}{\left[\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1\right]} \qquad (6)$$

Błąd zależności (6) jest rzędu $o(h^4)$, podczas gdy błąd metody trapezów jest rzędu $o(h^2)$.

Metoda całkowania przybliżonego Romberga łączy metody trapezów i ekstrapolacji Richardsona. Poniższa tabela przedstawia kolejność obliczeń w metodzie Romberga

$I_{0,0}$	$I_{0,1}$	$I_{0,2}$	$I_{0,3}$	$I_{0,4}$
$I_{1,0}$	$I_{1,1}$	$I_{1,2}$	$I_{1,3}$	
$I_{2,0}$	$I_{2,1}$	$I_{2,2}$		
$I_{3,0}$	$I_{3,1}$			
$I_{4,0}$				
$o(h^2)$	$o(h^4)$	$o(h^6)$	$o(h^8)$	$o(h^{10})$

Procedura:

1) obliczamy $I_{0,0}$ oraz $I_{1,0}$
2) wykonujemy ekstrapolację Richardsona dla $I_{0,0}$ oraz $I_{1,0}$ i otrzymujemy $I_{0,1}$
3) obliczamy $I_{2,0}$
4) wykonujemy ekstrapolację Richardsona dla $I_{1,0}$ oraz $I_{2,0}$ i otrzymujemy $I_{1,1}$
5) wykonujemy ekstrapolację Richardsona dla $I_{0,1}$ oraz $I_{1,1}$ i otrzymujemy $I_{0,2}$
6) obliczamy $I_{3,0}$
7) wykonujemy ekstrapolację Richardsona dla $I_{2,0}$ oraz $I_{3,0}$ i otrzymujemy $I_{2,1}$
8) wykonujemy ekstrapolację Richardsona dla $I_{1,1}$ oraz $I_{2,1}$ i otrzymujemy $I_{1,2}$
9) wykonujemy ekstrapolację Richardsona dla $I_{0,2}$ oraz $I_{1,2}$ i otrzymujemy $I_{0,3}$

itd.