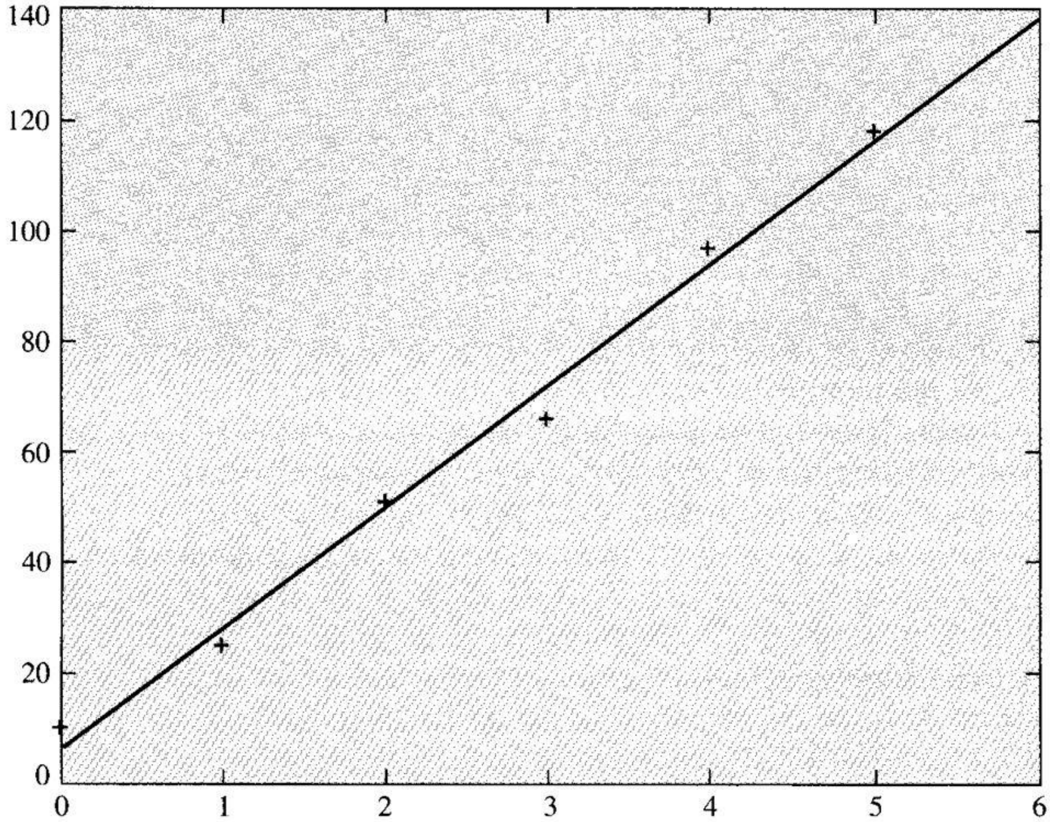
Aproksymacja funkcji

1. Sformułowanie problemu



Rys. 1. Aproksymacja liniowa funkcji.

Dane:

$x_0, x_1, ..., x_n$ (1.1)

oraz

$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), ..., y_n = f(x_n)$ (1.2)

Postać funkcji $y = f(x)$ nie znana lub znana.

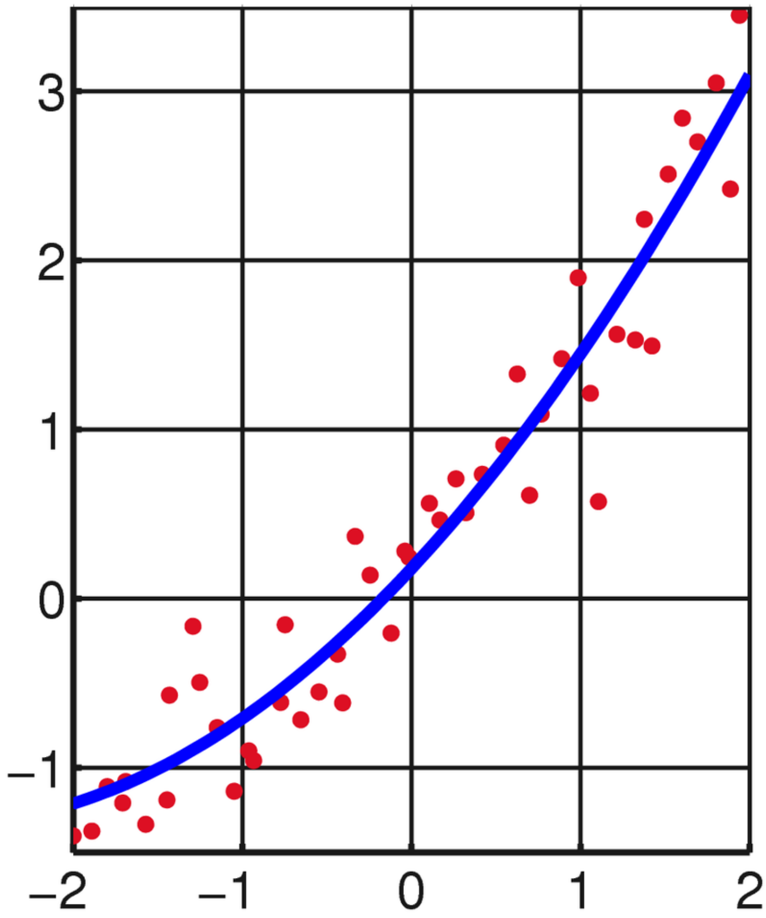
Poszukiwana jest funkcja $F(x)$ o następujących właściwościach:

$F(x) \approx f(x)$ w przedziale $x_{min} < x < x_{max}$ (1.3)

gdzie:

$x_{min} = \min x_i$ (1.4a)

$x_{max} = \max x_i$ (1.4b)



Rys. 2. Aproksymacja nieliniowa danych pomiarowych.

Funkcję F(x) nazywa się funkcją aproksymującą.

Funkcję F(x) można przedstawić w postaci liniowej kombinacji założonych z góry funkcji $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_l(x)$

$$y \approx \mathrm{F}(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_l\varphi_l(x) \tag{1.5}$$

gdzie $l << n$.

Współczynniki a_k dobieramy w taki sposób, aby jak najlepiej było spełnione przyjęte przez nas kryterium zgodności F(x) z f(x). Kryterium tym może być np. spełnienie warunku, aby miara sumarycznego błędu dla i = 0, 1, ... n była jak najmniejsza.

Błąd aproksymacji funkcji f(x) funkcją F(x) oblicza się następująco

$$\Delta y_i = y_i - \mathrm{F}(x_i) = y_i - a_0\varphi_0(x_i) - a_1\varphi_1(x_i) - \ldots - a_l\varphi_l(x_i) \tag{1.6}$$

<u>Metoda najmniejszych kwadratów</u>

Kryterium doboru współczynników funkcji aproksymującej, a_k

$$S = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i - \mathrm{F}(x_i)\right]^2 = \min \tag{1.7}$$

Gdy funkcja y = f(x) jest dana równaniem, kryterium (1.7) przyjmuje formę

$$S = \int_a^b \left[y - \mathrm{F}(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \min \tag{1.8}$$

Warunek konieczny i wystarczający na minimum funkcji (1.7) lub (1.8)

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \frac{\partial S}{\partial a_1} = \ldots = \frac{\partial S}{\partial a_l} = 0 \tag{1.9}$$

<u>2. Aproksymacja metodą najmniejszych kwadratów ciągu punktów wielomianem</u>

Jest dany ciąg n + 1 par danych (x_i, y_i), i = 0, 1, 2, ..., n. Należy dokonać aproksymacji wielomianem stopnia l, przy $l + 1 \le n + 1$.

$$\mathrm{F}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_l x^l \tag{2.1}$$

Kryterium dokładności aproksymacji

$$S = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i - \mathrm{F}(x_i)\right]^2 = \min \tag{2.2}$$

Warunek konieczny i wystarczający

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \frac{\partial S}{\partial a_1} = \ldots = \frac{\partial S}{\partial a_l} = 0 \tag{2.3}$$

Po obliczeniu pochodnych (2.3) otrzymujemy układ l + 1 równań normalnych

$$
\begin{aligned}
&a_0S_0 + a_1S_1 + \ldots + a_lS_l = T_0 \\
&a_0S_1 + a_1S_2 + \ldots + a_lS_{l+1} = T_1 \\
&a_0S_2 + a_1S_3 + \ldots + a_lS_{l+2} = T_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_0S_l + a_1S_{l+1} + \ldots + a_lS_{2l} = T_l
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

gdzie: $S_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k$ (2.5)

$$T_k = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k \tag{2.6}$$

Wyznacznik układu (4) jest niezerowy dla wszystkich x_i parami różnych. Dla dużych l macierz układu (4) może być źle uwarunkowana.

Aproksymacja wielomianem pierwszego stopnia

Dla l = 1

$$\mathrm{F}(x) = a_0 + a_1 x \tag{2.7}$$

W celu wyznaczenia współczynników a_0 oraz a_1 należy rozwiązać następujący układ dwóch równań liniowych

$$
\begin{aligned}
&a_0S_0 + a_1S_1 = T_0 \\
&a_0S_1 + a_1S_2 = T_1
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

gdzie:

$$S_0 = \sum_{i=0}^{n} x_i^0 = n + 1 \tag{2.9}$$

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n} x_i^1 = \sum_{i=0}^{n} x_i = x_0 + x_1 + \cdots + x_n \tag{2.10}$$

$$S_2 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 \tag{2.11}$$

$$T_0 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^0 = \sum_{i=0}^{n} y_i = y_0 + y_1 + \cdots + y_n \tag{2.12}$$

$$T_1 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^1 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \tag{2.13}$$

Rozwiązaniami układu (8) są

$$a_0 = \frac{s_2 T_0 - s_1 T_1}{s_0 s_2 - s_1^2} \tag{2.14}$$

$$a_1 = \frac{s_0 T_1 - s_1 T_0}{s_0 s_2 - s_1^2} \tag{2.15}$$

Po wykorzystaniu zależności (9) - (13) otrzymujemy

$$a_0 = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=0}^{n} y_i - \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i y_i}{(n+1) \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i \right)^2} \tag{2.16}$$

$$a_1 = \frac{(n+1) \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i y_i - \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot \sum_{i=0}^{n} y_i}{(n+1) \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i \right)^2} \tag{2.17}$$

3. Sprowadzanie aproksymacji nieliniowych do zagadnienia liniowego

Należy wyznaczyć współczynniki *A* oraz *n* następującego równania aproksymacyjnego

$$Ae^{-\frac{2}{x}} = \sqrt[n]{y} \tag{3.1}$$

dla danych *k* par punktów x_i, y_i. Równanie (3.1) logarytmujemy stronami i otrzymujemy

$$\ln A - \frac{2}{x} \ln e = \frac{1}{n} \ln y \tag{3.2a}$$

$$\ln y = n \ln A - \frac{2n}{x} \tag{3.2b}$$

Wprowadzamy nowe zmienne

$$x^* = \frac{1}{x} \tag{3.3a}$$

$$y^* = \ln y \tag{3.3b}$$

i otrzymujemy równanie liniowe

$$y^* = a_0 + a_1 x^* \tag{3.4}$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_0 &= n \ln A \\ a_1 &= -2n \end{aligned} \tag{3.5}$$

W celu znalezienia współczynników a_0 oraz a_1, należy punkty x_i, y_i, dla i = 1,2, ..., k, przeliczyć wzorami (3.3a) i (3.3b)

$$\begin{aligned} x_i^* &= \frac{1}{x_i} \\ y_i^* &= \ln y_i \end{aligned} \tag{3.6}$$

Po obliczeniu a_0 oraz a_1, wykorzystujemy wzory (3.5), by obliczyć A oraz n.

4. Spotykane typy funkcji aproksymujących F(x)

1. Kombinacje liniowe funkcji

$$\mathrm{F}(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_l\varphi_l(x) \tag{4.1}$$

gdzie funkcje $\varphi_i(x)$ mogą być np. wielomianami ortogonalnymi. Poszukujemy wartości a_0, a_1, ..., a_l.

2. Funkcje trygonometryczne

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{i=1}^{l} a_i \sin ix \tag{4.2}$$

Poszukujemy wartości a_1, a_2, ..., a_l.

3. Funkcje wymierne

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{Q}_m(x)} \tag{4.3}$$

gdzie

$$\mathrm{P}_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \tag{4.3a}$$

$$\mathrm{Q}_m(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m \tag{4.3b}$$

Poszukujemy wartości a_0, a_1, ..., a_n oraz b_0, b_1, ..., b_m.

4. Funkcje wykładnicze

$$\mathrm{F}(x) = A_0 \exp(a_0 x) + A_1 \exp(a_1 x) + \cdots + A_k \exp(a_k x) \tag{4.4}$$

Poszukujemy wartości a_0, a_1, ..., a_k oraz A_0, A_1, ..., A_k.

5. Oszacowanie dokładności aproksymacji

W metodzie najmniejszych kwadratów za miarę dokładności aproksymacji można przyjąć wartość minimalizowanej sumy kwadratów:

- dla przypadku dyskretnego

$$S = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{p}(x_i)\left[y_i - \mathrm{F}(x_i)\right]^2 \tag{5.1}$$

- dla przypadku ciągłego

$$S = \int_a^b \mathrm{p}(x)\left[y - \mathrm{F}(x)\right]^2 \mathrm{d}x \tag{5.2}$$

Odchylenie średniokwadratowe

- dla przypadku dyskretnego

$$\Delta S = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n}\left[y_i - \mathrm{F}(x_i)\right]^2}{n+1}} \tag{5.3}$$

- dla przypadku ciągłego

$$\Delta S = \sqrt{\frac{\int_a^b \left[y - \mathrm{F}(x)\right]^2 \mathrm{d}x}{b-a}} \tag{5.4}$$