

Interpolacja wielomianem Lagrange'a

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a

$$W(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n) + a_1(x-x_0)(x-x_2) \dots (x-x_n) \\ + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1})$$

gdzie

$$a_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2) \dots (x_0-x_n)}$$

$$a_1 = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2) \dots (x_1-x_n)}$$

⋮

$$a_n = \frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1) \dots (x_n-x_{n-1})}$$

Stąd

$$W(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}$$

Dane są punkty o współrzędnych x_i, y_i , dla $i = 0, 1, 2 \dots n$

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \\ 72 \\ 240 \\ 360 \end{pmatrix} \quad n := 4$$

Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a przechodzący przez te punkty.

Funkcja $f(k)$ oblicza iloczyn $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_{k-1})(x_0 - x_{k+1}) \dots (x_0 - x_n)$. Iloczyn ten jest liczbą.

Funkcja $g(k, X)$ oblicza iloczyn $(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_{k-1})(X - x_{k+1}) \dots (X - x_n)$. Iloczyn ten jest funkcją.

$$f(k) := \left| \begin{array}{l} \text{il} \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad \text{il} \leftarrow \text{il} \cdot (x_k - x_i) \text{ if } k \neq i \\ \text{il} \end{array} \right. \quad g(k, X) := \left| \begin{array}{l} \text{il} \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad \text{il} \leftarrow \text{il} \cdot (X - x_i) \text{ if } k \neq i \\ \text{il} \end{array} \right.$$

$$g(1, X) \text{ expand} \rightarrow X^4 - 16 \cdot X^3 + 83 \cdot X^2 - 164 \cdot X + 96$$

$$P(i, X) := y_i \cdot \frac{g(i, X)}{f(i)}$$

$W(X)$ jest wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a

$$\underline{W}(X) := \left| \begin{array}{l} S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad S \leftarrow S + P(i, X) \\ S \end{array} \right. \quad (1)$$

$$W(X) \text{ collect, } X \rightarrow \frac{167 \cdot X^3}{3} - \frac{62 \cdot X^4}{15} - \frac{641 \cdot X^2}{3} + \frac{982 \cdot X}{3} - \frac{776}{5} \quad (1a)$$

W tym miejscu i poniżej $W(x)$ będzie obliczane ze wzoru (1), ponieważ wielomian dany wzorem (1a) nie jest przypisany żadnej funkcji

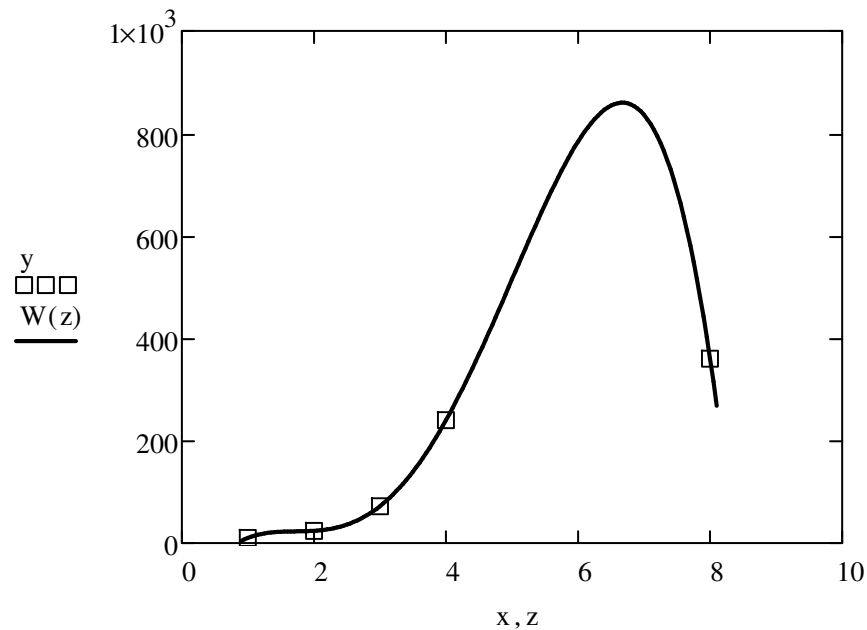
$$\underline{W}(X) := W(X) \text{ collect, } X \rightarrow \frac{167 \cdot X^3}{3} - \frac{62 \cdot X^4}{15} - \frac{641 \cdot X^2}{3} + \frac{982 \cdot X}{3} - \frac{776}{5} \quad (2)$$

W tym miejscu i poniżej $W(x)$ będzie obliczane ze wzoru (2), ponieważ wielomian dany tym wzorem jest przypisany funkcji $W(x)$.

Sprawdzenie wartości $W(X)$ w węzłach interpolacji

$$W(1) = 10 \quad W(2) = 24 \quad W(3) = 72 \quad W(4) = 240 \quad W(8) = 360$$

$$z := 0.9, 0.95 .. 8.1$$



Przedstawienie współczynników wielomianu jako liczb rzeczywistych

$$W(X) \left| \begin{array}{l} \text{collect, X} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow 327.33 \cdot X + -213.67 \cdot X^2 + 55.667 \cdot X^3 + -4.1333 \cdot X^4 - 155.2$$

W tym miejscu i poniżej $W(x)$ będzie obliczane ze wzoru (2).

$$\underline{W(X)} := W(X) \left| \begin{array}{l} \text{collect, X} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow 327.33 \cdot X + -213.67 \cdot X^2 + 55.667 \cdot X^3 + -4.1333 \cdot X^4 - 155.2 \quad (3)$$

W tym miejscu i poniżej $W(x)$ będzie obliczane ze wzoru (3).

Sprawdzenie wartości $W(X)$ w węzłach interpolacji

$$W(1) = 9.994 \quad W(2) = 23.983 \quad W(3) = 71.972$$

$$W(4) = 239.963 \quad W(8) = 360.067$$