

LESZEK MALINOWSKI

**PRZEWODZENIE CIEPŁA
MODEL HIPERBOLICZNY I RELAKSACYJNY**

SZCZECIN 2009

Recenzenci

TADEUSZ BES

JAN SKŁADZIEN

Opracowanie językowe

JOLANTA ORKISZ

WYDANO ZA ZGODĄ REKTORA ZACHODNIOPOMORSKIEGO UNIWERSYTETU
TECHNOLOGICZNEGO W SZCZECINIE

ISBN 978-83-7663-014-4

WYDAWNICTWO UCZELNIANE ZACHODNIOPOMORSKIEGO UNIWERSYTETU
TECHNOLOGICZNEGO W SZCZECINIE

70-311 Szczecin, al. Piastów 50, tel. 091 449 4760, e-mail: wydawnictwo@zut.edu.pl

Druk PPH ZAPOL Dmochowski Sobczyk Sp.j., 71-062 Szczecin, al. Piastów 42

tel. 091 435-1911, e-mail: zarzad@zapol.com.pl

Spis treści

Przedmowa	9
Wykaz ważniejszych oznaczeń	11
1. Wstęp	13
2. Modele matematyczne przewodzenia ciepła	16
2.1. Model paraboliczny	16
2.1.1. <i>Sformułowanie równania przewodnictwa i jego podstawowe właściwości</i>	16
2.1.2. <i>Paraboliczny model przewodzenia ciepła a druga zasada termodynamiki</i>	17
2.2. Model hiperboliczny	19
2.2.1. <i>Równanie Cattaneo i hiperboliczne równanie przewodnictwa cieplnego</i>	19
2.2.2. <i>Sens fizyczny równania Cattaneo</i>	19
2.2.3. <i>Warunki graniczne dla hiperbolicznego równania przewodnictwa cieplnego</i>	21
2.2.3.1. <i>Warunki początkowe</i>	21
2.2.3.2. <i>Warunki brzegowe</i>	22
2.2.4. <i>Hiperboliczny model przewodzenia ciepła a druga zasada termodynamiki</i>	23
2.2.5. <i>Analogia pomiędzy transportem ciepła a ruchem punktu materialnego w ośrodku stawiającym opór</i>	24
2.2.6. <i>Rozwiązanie równania Cattaneo dla jednowymiarowego przypadku skokowej zmiany gradientu temperatury</i>	25
2.2.7. <i>Czasy relaksacji strumienia ciepła</i>	27
2.3. Model relaksacyjny	30
2.3.1. <i>Bezwładne źródło ciepła oraz niestacjonarna wydajność źródła</i>	30
2.3.2. <i>Sens fizyczny bezwładnego źródła ciepła</i>	31
2.3.3. <i>Relaksacyjne równanie przewodnictwa cieplnego</i>	32
2.3.4. <i>Relaksacyjne równanie przewodnictwa cieplnego a druga zasada termodynamiki</i>	33
2.3.5. <i>Relaksacyjny model przewodzenia i generacji ciepła w zmiennych bezwymiarowych</i>	34
2.3.6. <i>Warunki graniczne</i>	37
3. Rozwiązania hiperbolicznych zagadnień przewodzenia ciepła	39
3.1. <i>Fale termiczne w ciele półnieskończonym ze źródłem ciepła o wydajności liniowo zależnej od temperatury</i>	39

3.1.1. Sformułowanie problemu w zmiennych wymiarowych	39
3.1.2. Sformułowanie problemu w zmiennych bezwymiarowych	40
3.1.3. Rozwiązanie analityczne	41
3.1.4. Rozwiązanie dla źródła ciepła o stałej wydajności	44
3.1.5. Model paraboliczny zjawiska	44
3.1.6. Numeryczna weryfikacja rozwiązań	44
3.1.7. Przykładowe obliczenia i dyskusja wyników	46
3.2. Fale termiczne zainicjowane lokalnym źródłem ciepła	49
3.2.1. Model matematyczny	49
3.2.1.1. Model hiperboliczny w zmiennych wymiarowych	49
3.2.1.2. Model paraboliczny w zmiennych wymiarowych	50
3.2.1.3. Model hiperboliczny w zmiennych bezwymiarowych	51
3.2.1.4. Model paraboliczny w zmiennych bezwymiarowych	52
3.2.2. Rozwiązanie dla dowolnej postaci funkcji $\Psi_i(\tau)$	52
3.2.2.1. Model hiperboliczny	52
3.2.2.2. Model paraboliczny	54
3.2.3. Rozwiązania dla wybranych postaci funkcji $\Psi_i(\tau)$	55
3.2.3.1. Źródło o nieskończenie krótkim czasie działania	55
3.2.3.2. Źródło o skończonym czasie działania	56
3.2.4. Analiza wyników przykładowych obliczeń	57
3.3. Zastosowanie modelu hiperbolicznego do wyznaczania energii krytycznej technicznych nadprzewodników	62
3.3.1. Wprowadzenie	62
3.3.2. Model matematyczny strefy oporowej	62
3.3.3. Rozwiązanie	66
3.3.4. Wyniki obliczeń	69
3.4. Propagacja fal termicznych w technicznym nadprzewodniku przy uwzględnieniu zależności parametrów termofizycznych od temperatury	75
3.4.1. Wstęp	75
3.4.2. Model matematyczny w zmiennych wymiarowych	75
3.4.3. Model matematyczny w zmiennych bezwymiarowych	77
3.4.4. Rozwiązanie	78
3.4.5. Rozwiązanie dla modelu ze stałymi parametrami termofizycznymi	79

3.4.6. Porównanie pól temperatury dla stałych i zmiennych parametrów termofizycznych	80
3.5. Fale termiczne w cienkiej płycie symetrycznie ogrzewanej po obu stronach	83
3.5.1. Wstęp	83
3.5.2. Model matematyczny zjawiska	83
3.5.3. Rozwiązanie analityczne	84
3.5.4. Rozwiązania dla specjalnych przypadków źródła ciepła	86
3.5.5. Weryfikacja rozwiązania	87
3.5.6. Przykładowe obliczenia i dyskusja wyników	88
4. Rozwiązania relaksacyjnych zagadnień przewodzenia ciepła	93
4.1. Adiatermiczne ciało o małym oporze cieplnym	93
4.1.1. Włączenie źródła o stałej wydajności	94
4.1.2. Wydajność źródła proporcjonalna do temperatury	96
4.1.3. Źródło impulsowe	96
4.1.4. Źródło o wydajności zmiennej okresowo	98
4.1.5. Wydajność źródła proporcjonalna do czasu	101
4.2. Skok strumienia na brzegu ciała półnieskończonego	104
4.2.1. Sformułowanie problemu	104
4.2.2. Metoda rozwiązania	104
4.2.3. Wyniki obliczeń	105
4.3. Ewolucja strefy oporowej w technicznym nadprzewodniku	108
4.3.1. Wprowadzenie	108
4.3.2. Model matematyczny strefy oporowej	108
4.3.3. Rozwiązanie i analiza wyników	109
4.4. Skok temperatury na brzegu ciała półnieskończonego, w którym relaksacja strumienia ciepła jest pomijalnie mała	114
4.4.1. Sformułowanie problemu	114
4.4.2. Rozwiązanie analityczne	114
4.4.3. Obliczenia i dyskusja wyników	117
4.5. Przyłożenie zmiennej w czasie temperatury na brzeg ciała półnieskończonego	121
4.5.1. Sformułowanie problemu	121
4.5.2. Analityczne rozwiązanie modelu relaksacyjnego dla $\tau_g = 0,5$	121

<i>4.5.3. Analityczne rozwiązanie modelu parabolicznego</i>	123
<i>4.5.4. Rozwiązanie modelu relaksacyjnego z numerycznym odwróceniem transformaty Laplace'a</i>	124
<i>4.5.5. Obliczenia i dyskusja wyników</i>	125
4.6. Skok temperatury na brzegu ciała półnieskończonego dla $\tau_g = 0,5$	132
<i>4.6.1. Wstęp</i>	132
<i>4.6.2. Sformułowanie problemu</i>	132
<i>4.6.3. Rozwiązanie analityczne</i>	133
<i>4.6.4. Obliczenia i dyskusja wyników</i>	134
5. Podsumowanie	138
Załącznik A. Wybrane funkcje specjalne	140
Załącznik B. Transformacja Laplace'a	141
Załącznik C. Przykładowy program w języku mathcad 13	143
Załącznik D. Przykładowy program w języku mathcad 13	146
Literatura	148

Przedmowa

W ostatnich latach znacznie wzrosło zainteresowanie modelem matematycznym przewodzenia ciepła w ciałach stałych, który uwzględnia skończoną prędkość rozchodzenia się ciepła. W literaturze światowej ukazało się bardzo wiele publikacji, w których autorzy proponują różne sformułowania równania opisującego przewodzenie ciepła ze skończoną prędkością, badają właściwości proponowanych równań i rozwiązują przykładowe zagadnienia brzegowe. Obecnie najczęściej stosowane jest hiperboliczne równanie przewodnictwa cieplnego sformułowane przez Cattaneo i Vernotta.

Niniejsza praca poświęcona jest hiperbolicznemu równaniu przewodnictwa cieplnego oraz sformułowanemu przez autora równaniu relaksacyjnemu przewodzenia ciepła, którego szczególnym przypadkiem jest równanie hiperboliczne. Równanie relaksacyjne uwzględnia zarówno relaksację strumienia ciepła (skończoną prędkość strumienia ciepła) jak i relaksację wydajności wewnętrznego źródła ciepła.

Praca składa się z czterech zasadniczych części. Część pierwsza zawiera wprowadzenie do tematyki modelowania matematycznego przewodzenia ciepła. W części drugiej omówiono sposób sformułowania i właściwości parabolicznego, hiperbolicznego i relaksacyjnego równania przewodnictwa cieplnego. W części trzeciej zaprezentowano rozwiązania analityczne i numeryczne wybranych przypadków hiperbolicznych, część czwarta zawiera rozwiązania analityczne, półanalityczne i numeryczne wybranych przypadków relaksacyjnych.

Większość zagadnień brzegowych analizowanych w pracy rozwiązano analitycznie metodą transformacji Laplace'a. Metoda ta jest szczególnie dogodna do rozwiązywania liniowych zagadnień jednowymiarowych w ośrodkach półnieskończonych, takich jakże przede wszystkim są analizowane w pracy. Dobór zaprezentowanych przykładów z jednej strony wynika z dążenia do uwypuklenia charakterystycznych cech modelu hiperbolicznego i relaksacyjnego w porównaniu z modelem parabolicznym, z drugiej strony jest on ograniczony możliwością uzyskania rozwiązań analitycznych.

Większość oryginalnych rozwiązań zaprezentowanych w trzeciej i czwartej części pracy zostało uprzednio opublikowanych przez autora [37, 41-45, 47] i przez autora z zespołem [30-33] w międzynarodowych czasopismach naukowych: International Journal of

Heat and Mass Transfer [47], International Communications in Heat and Mass Transfer [33, 41], Cryogenics [31, 42], Journal of Physics D: Applied Physics [43, 45] oraz Heat and Mass Transfer [30, 32, 37, 44]. Rozwiązania dotyczące modelu relaksacyjnego zostały także omówione w monografii pt. „Relaksacyjny model przewodzenia i generacji ciepła” [46].

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- a - dyfuzyjność cieplna, $k/(\rho c_p)$, m^2/s
- c_p - ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, $J/(kg K)$
- c_v - ciepło właściwe przy stałej objętości, $J/(kg K)$
- C - ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, $J/(cm^3 K)$
- g - stacjonarna wydajność wewnętrznego źródła ciepła, W/m^3
- g_t - niestacjonarna wydajność wewnętrznego źródła ciepła, W/m^3
- G - gradient temperatury, K/m
- wydajność wewnętrznego źródła ciepła odniesiona do powierzchni przewodnika, W/cm^2
- I_1 - zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rzędu
- k - współczynnik przewodnictwa cieplnego, $W/(m K)$
- L - operator Laplace'a
- L^{-1} - odwrotny operator Laplace'a
- \mathbf{q} - wektor gęstości strumienia ciepła, W/m^2
- q_x - współrzędna na osi x wektora \mathbf{q} , W/m^2
- \mathbf{r} - promień wodzący, m
- s - entropia jednostkowa, $J/(kg K)$
- zmienna zespolona Laplace'a
- t - czas, s
- t_g - czas relaksacji wydajności wewnętrznego źródła ciepła, s
- t_k - czas relaksacji strumienia ciepła, s
- T - temperatura bezwzględna, K
- T_m, T_0 - temperatury odniesienia, K
- $u(t)$ - jednostkowa funkcja skokowa
- w - prędkość, m/s
- prędkość propagacji fali termicznej, m/s
- x, y, z - współrzędne liniowe, m

X, Y, Z - bezwymiarowe współrzędne liniowe

Litery greckie

$\delta(t)$ - funkcja (dystrybucja) Diraca

Θ - bezwymiarowa temperatura

$\bar{\Theta}$ - transformata bezwymiarowej temperatury

ρ - gęstość, kg/m^3

σ - wydajność źródła entropii, $\text{W}/(\text{m}^3\text{K})$

τ - bezwymiarowy czas

τ_g - bezwymiarowy czas relaksacji wydajności wewnętrznego źródła ciepła, $t_g/(2t_k)$

τ_k - bezwymiarowy czas relaksacji strumienia ciepła, 0,5

Φ - wektor bezwymiarowej gęstości strumienia ciepła

Φ_x - współrzędna na osi x wektora Φ

Ψ - bezwymiarowa stacjonarna wydajność wewnętrznego źródła ciepła

Ψ_t - bezwymiarowa niestacjonarna wydajność wewnętrznego źródła ciepła

1. Wstęp

Klasyczna fenomenologiczna teoria przewodzenia ciepła jest oparta na empirycznym prawie Fouriera, według którego przyczyną przepływu ciepła w ciele jest wystąpienie w nim gradientu temperatury. Przewodzenie ciepła następuje natychmiast po pojawieniu się gradientu temperatury, a gęstość strumienia ciepła jest proporcjonalna do gradientu. Każdej zmianie gradientu temperatury odpowiada bezzwłoczna zmiana gęstości strumienia ciepła do wartości wynikającej z prawa Fouriera. Wprowadzenie prawa Fouriera do równania bilansu energii prowadzi do parabolicznego równania przewodnictwa ciepła, które opisuje przewodzenie ciepła z nieskończenie dużą prędkością. W parabolicznym modelu przewodzenia ciepła zmiana temperatury w dowolnym punkcie ciała jest natychmiast „odczuwana” przez wszystkie pozostałe punkty należące do ciała. Jednak bezpośrednio po wzroście temperatury w określonym punkcie ciała, przyrost temperatury w punktach leżących odpowiednio daleko od tego punktu jest bardzo niewielki, praktycznie równy zero.

Mikroskopowa analiza mechanizmu przewodzenia ciepła prowadzi do wniosku, że postulat nieskończenie dużej prędkości strumienia ciepła nie może być prawdziwy. Z mikroskopowego punktu widzenia przewodzenie ciepła polega na przekazywaniu energii przez nośniki energii występujące w ciele. Nośniki o większej energii przekazują energię nośnikom o energii mniejszej podczas zderzeń. Im wyższa temperatura ciała, tym większa energia nośników. W metalach nośnikami energii podczas przewodzenia ciepła są elektrony swobodne i fonony, w niemetalach o budowie krystalicznej nośnikami energii są fonony. Z powodu opisanego wyżej mechanizmu przewodzenia ciepła, strumień ciepła przemieszcza się w przewodniku ze skończoną prędkością wynikającą z prędkości nośników. Prędkość nośników można oszacować dzieląc średnią drogę swobodną nośników przez średni czas pomiędzy kolejnymi kolizjami nośników. W rzeczywistym przypadku przewodzenia ciepła, natychmiast po wzroście temperatury w określonym miejscu ciała, reszta ciała ma niezmienną temperaturę, gdyż strumień ciepła przemieszcza się w ciele z określoną prędkością. Mamy tu do czynienia z falą termiczną, co zostało wykazane doświadczalnie [1, 56]. Prędkość tej fali jest zazwyczaj bardzo duża, np. prędkość fononów w ciele stałym o temperaturze otoczenia jest rzędu od 10^4 do 10^5 m/s [65]. Z tej przyczyny założenie jej nieskończenie dużej wartości jest najczęściej uzasadnione. Jednak gdy proces przewodzenia ciepła charakteryzuje się bardzo dużą dynamiką, np. podczas ogrzewania promieniem laserowym [14], lub gdy temperatura ośrodka przewodzącego ciepło jest bardzo niska, rzędu kilku kelwinów [1, 42, 59], falowy charakter transportu ciepła może być dominujący i

wówczas paraboliczny model przewodzenia staje się niewystarczający. Kamiński [25] potwierdził eksperymentalnie, że również w przypadku ciał o złożonej strukturze wewnętrznej zawierających wilgoć, np. ciał porowatych, ciał o budowie komórkowej, zawieszin, past, itp., obserwowany jest transport ciepła w postaci fali termicznej. Odkrycie Kamińskiego zostało potwierdzone eksperymentalnie także przez innych badaczy [50, 57]. Ukazały się jednak też prace kwestionujące falowy charakter transportu ciepła w takich ciałach [19, 20].

Stwierdzenie falowego charakteru zjawiska przewodzenia ciepła zrodziło potrzebę sformułowania nowego modelu tego zjawiska. Nowe równanie przewodnictwa cieplnego powinno być równaniem opisującym ruch fal tłumionych poruszających się ze skończoną prędkością. Równanie to powinno także umożliwiać opis stacjonarnego przewodzenia ciepła. W literaturze można znaleźć wiele prób sformułowania takiego równania, obszerny przegląd prac na ten temat zawarty jest na przykład w [22, 23]. Obecnie największe zastosowanie ma hiperboliczne równanie przewodnictwa cieplnego oparte na prawie Fouriera zmodyfikowanym przez Cattaneo [9, 10]. Transport ciepła opisywany przez to równanie ma wszystkie właściwości postulowane dla modelu uwzględniającego skończoną prędkość ciepła. Inną cenną właściwością równania hiperbolicznego Cattaneo jest to, że paraboliczne równanie przewodnictwa cieplnego może być traktowane jako jego graniczny przypadek dla nieskończonej prędkości fali. Przepływ ciepła opisywany hiperbolicznym równaniem przewodnictwa cieplnego ma charakter relaksacyjny, tzn. po zmianie wielkości gradientu temperatury strumień ciepła zmienia się wykładniczo do nowej wartości wynikającej z klasycznego prawa Fouriera. Charakterystyczny czas wykładniczej zmiany strumienia nazywany jest czasem relaksacji i jest on, co do rzędu wielkości, równy średniemu czasowi pomiędzy zderzeniami nośników energii.

Analiza przewodzenia ciepła w ciałach, w których występują wewnętrzne źródła ciepła o wydajności zależnej od temperatury prowadzi do wniosku, że wydajność tych źródeł również podlega zjawisku relaksacji. Rozważmy na przykład przewodnik transportujący prąd elektryczny. Po zmianie temperatury przewodnika następuje zmiana jego oporności. Zmiana oporności pociąga za sobą zmianę wydajności źródła ciepła Joule'a. Pomiędzy zmianą temperatury a zmianą wydajności źródła upływa skończony czas. Podobnie rzecz się przedstawia w nadprzewodnikach prądu elektrycznego stabilizowanych materiałem nienadprzewodzącym (normalnym) [42]. Nadprzewodnik taki zbudowany jest z dobrze przewodzącego ciepło normalnego stabilizatora i osadzonych w nim bardzo cienkich włókien nadprzewodzących, które charakteryzują się bardzo wysokim oporem cieplnym [40, 70].

Mechanizm transportu i generacji ciepła jest w tym przypadku następujący. Z powodu bardzo dużej różnicy w przewodności cieplnej stabilizatora i nadprzewodnika, ciepło jest transportowane wzdłuż przewodu przede wszystkim stabilizatorem. Włókna nadprzewodzące ogrzewane są głównie dzięki poprzecznemu transportowi ciepła ze stabilizatora. Po przekroczeniu przez włókna nadprzewodzące temperatury krytycznej, odpowiednia część prądu transportowanego nadprzewodnikiem wypychana jest do stabilizatora i rozpoczyna się w nim generacja ciepła Joule'a. Pomędzy wzrostem temperatury przewodu a odpowiadającym mu wzrostem wydajności źródła upływa skończony czas. Wydajność źródła ciepła Joule'a w technicznym nadprzewodniku podlega więc zjawisku relaksacji. W dalszej części pracy zostanie sformułowane relaksacyjne równanie przewodnictwa cieplnego, które będzie uwzględniać relaksację strumienia ciepła (skończoną prędkość rozchodzenia się ciepła) oraz relaksację wydajności wewnętrznego źródła ciepła.

2. Modele matematyczne przewodzenia ciepła

2.1. Model paraboliczny

2.1.1. Sformułowanie równania przewodnictwa i jego podstawowe właściwości

Paraboliczne równanie przewodnictwa cieplnego

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{g}{\rho c_p} \quad (2.1.1)$$

powstaje w wyniku podstawienia wyrażenia na wektor gęstości strumienia ciepła \mathbf{q} określonego przez prawo Fouriera

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (2.1.2)$$

do równania bilansu energii

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + g \quad (2.1.3)$$

Z równania Fouriera (2.1.2) wynika, że każdej zmianie gradientu temperatury towarzyszy natychmiastowa, odpowiednia zmiana gęstości strumienia ciepła. Jest to właściwość niezgodna z fizyką zjawiska, gdyż strumień ciepła podlega relaksacji, czyli gęstość strumienia ciepła osiąga wartość wynikającą z równania (2.1.2) z pewnym opóźnieniem. W zasadzie związek pomiędzy gęstością strumienia ciepła a gradientem temperatury w postaci (2.1.2) powinien być wykorzystywany tylko do opisu stanów stacjonarnych. W wyniku zastosowania równania (2.1.2) do opisu stanów niestacjonarnych otrzymuje się nieskończenie dużą prędkość transportu ciepła w równaniu parabolicznym (2.1.1). W związku z tym, w parabolicznym modelu przewodzenia ciepła zmiana temperatury w dowolnym punkcie ciała jest natychmiast "odczuwana" w każdym innym punkcie ciała, co jest niezgodne z rzeczywistością. Jednak w dużej odległości od punktu, w którym nastąpiła ta zmiana temperatury, natychmiastowe przyrosty temperatury nią spowodowane, uzyskane z modelu parabolicznego, są tak niewielkie, że w większości przypadków dokładność wyników otrzymywanych z tego modelu jest wystarczająco dobra. Nieskończoną prędkość rozchodzenia się ciepła w modelu parabolicznym można zilustrować np. przypadkiem eksplozji temperatury na brzegu ciała półnieskończonego. Rozwiązaniem równania (2.1.1), dla $g = 0$, z następującymi warunkami granicznymi

$$T(x,0) = 0 \quad (2.1.4)$$

$$T(0,t) = \delta(t) \quad (2.1.5)$$

$$T(\infty, t) = 0 \quad (2.1.6)$$

jest funkcja

$$T(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi(at)^{3/2}}} \exp\left[-x^2/(4at)\right] \quad (2.1.7)$$

W warunku brzegowym (2.1.5) $\delta(t)$ jest funkcją Diraca. Rozwiązanie (2.1.7) ma taką właściwość, że dla dowolnie małego $t > 0$ oraz dowolnie dużego x jest $T(x, t) > 0$. W przypadku falowego modelu tego przypadku przewodzenia ciepła, dla $x > wt$, gdzie w jest prędkością frontu fali termicznej, jest $T(x, t) = 0$.

Źródło ciepła występujące w równaniach (2.1.1) oraz (2.1.3) może być w ogólności funkcją współrzędnych, czasu i temperatury

$$g = g(x, y, z, t, T) = g(\mathbf{r}, t, T) \quad (2.1.8)$$

2.1.2. Paraboliczny model przewodzenia ciepła a druga zasada termodynamiki

Dla nieodkształcalnych ciał stałych, które są przedmiotem rozważań w niniejszej pracy, $\rho = const$ oraz $c_v = c_p$. Zgodnie z klasyczną termodynamiką procesów nierównowagowych opartą na postulacie lokalnej równowagi termodynamicznej różniczka entropii jednostkowej jest w tym przypadku zdefiniowana następująco

$$ds = (c_p / T) dT \quad (2.1.9)$$

Po podzieleniu równania (2.1.9) stronami przez dt oraz po podstawieniu do niego wyrażenia na dT/dt wyznaczonego z równania (2.1.3) oraz wyrażenia na ds/dt otrzymanego z równania bilansu entropii

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \sigma \quad (2.1.10)$$

otrzymuje się następujące wyrażenie na wydajność źródła entropii

$$\sigma = \frac{g}{T} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} \quad (2.1.11)$$

Podstawiając za \mathbf{q} prawą stronę równania Fouriera (2.1.2) możemy przekształcić równanie (2.1.11) do postaci

$$\sigma = \frac{g}{T} + \frac{k(\nabla T)^2}{T^2} \quad (2.1.12)$$

Pierwszy człon prawej strony równania (2.1.12) reprezentuje produkcję entropii spowodowaną działaniem źródła ciepła, natomiast drugi człon reprezentuje produkcję entropii wynikającą z nieodwracalnego przewodzenia ciepła. Przy $g \geq 0$ całkowita produkcja entropii σ jest zawsze nieujemna, co jest zgodne z drugą zasadą termodynamiki procesów nierównowagowych, której matematycznym sformułowaniem jest nierówność

$$\sigma \geq 0 \quad (2.1.13)$$

2.2. Model hiperboliczny

2.2.1. Równanie Cattaneo i hiperboliczne równanie przewodnictwa cieplnego

W celu uwzględnienia w równaniu przewodnictwa cieplnego skończonej prędkości rozchodzenia się ciepła, Cattaneo [9, 10] i później niezależnie Vernotte [67] zaproponowali następującą modyfikację równania Fouriera

$$t_k \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} = -k \nabla T \quad (2.2.1)$$

gdzie t_k jest czasem relaksacji strumienia ciepła. Zmodyfikowane prawo Fouriera (2.2.1) wraz z równaniem bilansu energii (2.1.3) stanowią hiperboliczny model przewodzenia ciepła. Układ równań (2.1.3) oraz (2.2.1) można zredukować do jednego równania przewodnictwa cieplnego. W tym celu dokonujemy dywergencji obu stron równania (2.2.1)

$$t_k \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{q})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = -\nabla \cdot (k \nabla T) \quad (2.2.2)$$

Następnie do równania (2.2.2) podstawiamy $\nabla \cdot \mathbf{q}$ wyznaczone z równania (2.1.3). Po uporządkowaniu otrzymujemy hiperboliczne równanie przewodnictwa cieplnego

$$t_k \rho c_p \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + t_k \frac{\partial g}{\partial t} + g \quad (2.2.3)$$

Dla stałej wartości współczynnika przewodzenia ciepła równanie (2.2.3) można przedstawić w postaci [9, 10, 26, 53]

$$t_k \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{1}{\rho c_p} \left(t_k \frac{\partial g}{\partial t} + g \right) \quad (2.2.4)$$

Równanie (2.2.4) opisuje propagację fali termicznej w ciele stałym mającym wewnętrzne źródło ciepła. Prędkość fali jest równa

$$w = (a/t_k)^{1/2} \quad (2.2.5)$$

Dla $t_k = 0$ równanie Cattaneo (2.2.1) redukuje się do klasycznego prawa Fouriera (2.1.2), natomiast hiperboliczne równanie przewodnictwa cieplnego (2.2.4) redukuje się do parabolicznego równania przewodnictwa cieplnego (2.1.1).

2.2.2. Sens fizyczny równania Cattaneo

Z mikroskopowej analizy przewodzenia ciepła wynika, że strumień ciepła jest opóźniony w

stosunku do gradientu temperatury wywołującego przepływ ciepła. Tzou [65] zaproponował następujący model matematyczny tego zjawiska

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t + t_k) = -k\nabla T(\mathbf{r}, t) \quad (2.2.6)$$

Równanie (2.2.6) mówi, że po pojawieniu się gradientu temperatury w chwili t , przepływ ciepła następuje w chwili $t + t_k$, gdzie t_k jest czasem opóźnienia strumienia ciepła w stosunku do gradientu temperatury. Gęstość opóźnionego strumienia ciepła jest równa wartości wynikającej z klasycznego prawa Fouriera. Po rozwinięciu lewej strony równania (2.2.6) w szereg Taylora pierwszego rzędu otrzymujemy z równania (2.2.6) równanie Cattaneo

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) + t_k \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = -k\nabla T(\mathbf{r}, t) \quad (2.2.7)$$

Równanie (2.2.7) można więc traktować jako szczególny przypadek bardziej ogólnego równania Tzou (2.2.6).

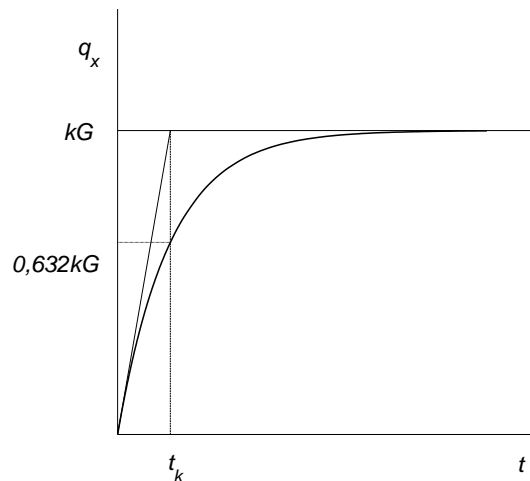
Zajmiemy się teraz bardziej szczegółowo analizą właściwości równania Cattaneo. W celu uproszczenia rozważań poddamy analizie przypadek jednowymiarowy (ciało półnieskończone). Dla tego przypadku równanie Cattaneo przyjmuje formę

$$t_k \frac{\partial q_x}{\partial t} + q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.2.8)$$

Założmy, że chwili początkowej $t = 0$, przy $q_x(x, 0) = 0$, w ciele został wytworzony stały gradient temperatury $\partial T / \partial x(x, t) = G$. Rozwiązaniem równania (2.2.8) dla tego przypadku jest funkcja

$$q_x = -kG[1 - \exp(-t/t_k)] \quad (2.2.9)$$

przedstawiona w formie graficznej na rys. 2.2.1. Po wytworzeniu gradientu temperatury gęstość strumienia ciepła wzrasta wykładniczo od zera do wartości wynikającej z prawa Fouriera (2.1.2), równej $-kG$. Dla $t = t_k$ gęstość strumienia ciepła q_x osiąga wartość wynoszącą $-0,632kG$. Gdyby tempo wzrostu gęstości strumienia ciepła dq_x/dt było stałe i równe tempu początkowemu (tzn. dla $t = 0$) wynoszącemu $-kG/t_k$, to wówczas gęstość strumienia osiągnęłaby wartość końcową wynikającą z klasycznego prawa Fouriera po czasie równym czasowi relaksacji t_k (patrz rys. 2.2.1). Przy $t_k = 0$ gęstość strumienia ciepła natychmiast ma wartość wynikającą z klasycznego prawa Fouriera.



Rys. 2.2.1. Zależność gęstości strumienia ciepła od czasu po wytworzeniu w ciele półnieskończonym stałego gradientu temperatury

Na podstawie mikroskopowej analizy zjawiska przewodzenia ciepła można wyciągnąć wniosek, że strumień ciepła osiąga wartość wynikającą z prawa Fouriera dopiero po ustaleniu się w danym obszarze przewodnika lokalnej równowagi termodynamicznej. Zgodnie z modelem Cattaneo następuje to przy $t \rightarrow \infty$. W rozważanym przypadku równanie (2.2.8) można także przedstawić w postaci

$$\frac{d(q_x - q_F)}{dt} = -\frac{q_x - q_F}{t_k} \quad (2.2.10)$$

gdzie $q_F = -kG$. Równanie Cattaneo może być więc interpretowane jako zastosowanie standardowego wykładniczego modelu procesów relaksacyjnych [15] do gęstości strumienia ciepła.

2.2.3. Warunki graniczne dla hiperbolicznego równania przewodnictwa cieplnego

2.2.3.1. Warunki początkowe

W hiperbolicznym równaniu przewodnictwa cieplnego występuje pochodna cząstkowa drugiego rzędu temperatury względem czasu. Równanie to wymaga więc sformułowania drugiego warunku początkowego. Równanie hiperboliczne otrzymuje się redukując układ równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu (2.1.3) oraz (2.2.1). Warunek początkowy dla równania (2.1.3) można przedstawić jako

$$T(\mathbf{r}, 0) = f_1(\mathbf{r}) \quad (2.2.11)$$

Warunek (2.2.11) jest także pierwszym warunkiem początkowym dla hiperbolicznego równania przewodnictwa cieplnego. Warunek początkowy dla równania (2.2.1) ma postać

$$\mathbf{q}(\mathbf{r},0) = f_2(\mathbf{r}) \quad (2.2.12)$$

Drugi warunek początkowy dla równania hiperbolicznego wyznacza się z równania bilansu energii dla czasu $t = 0$ wykorzystując warunek (2.2.12)

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{r},0) = \frac{-(\nabla \cdot \mathbf{q})(\mathbf{r},0) + g(\mathbf{r},0,T)}{\rho c_p} \quad (2.2.13)$$

Typowa, wynikająca ze zjawiska opóźnienia strumienia ciepła w stosunku do gradientu temperatury, postać warunku (2.2.12) jest

$$\mathbf{q}(\mathbf{r},0) = \mathbf{0} \quad (2.2.14)$$

Przy uwzględnieniu (2.2.14) warunek początkowy (2.2.13) upraszcza się do

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{r},0) = \frac{g(\mathbf{r},0,T)}{\rho c_p} \quad (2.2.15)$$

W przypadku, gdy w chwili $t = 0$ wydajność wewnętrznego źródła ciepła jest równa zero lub wewnętrzne źródło ciepła nie występuje w ciele, warunek (2.2.15) przyjmuje postać

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{r},0) = 0 \quad (2.2.16)$$

2.2.3.2. Warunki brzegowe

Ze względu na falowy charakter transportu ciepła w przypadku modelu hiperbolicznego, warunki brzegowe dla tego modelu mogą się różnić od analogicznych warunków dla modelu parabolicznego. Warunki brzegowe muszą być tak sformułowane, aby analizowane zagadnienie miało sens fizyczny. Jest to w przypadku modelu hiperbolicznego zagadnienie trudne, zwłaszcza w przypadku ciał ograniczonych, w których dochodzi do wielokrotnych odbić i nakładania się fal [27]. Na przykład warunki brzegowe dla modelu parabolicznego, w których występuje prawo Fouriera, przed zastosowaniem w modelu hiperbolicznym muszą być zmodyfikowane zgodnie z równaniem (2.2.1).

W przypadku warunku brzegowego trzeciego rodzaju gęstość strumienia ciepła wymienianego przez powierzchnię ciała z otaczającym płynem określa równanie

$$q_s(t) = \alpha [T_s(t) - T_f] \quad (2.2.17)$$

gdzie $q_s(t)$ jest niestacjonarną gęstością strumienia ciepła wymienianego przez powierzchnię ciała, $T_s(T)$ jest temperaturą powierzchni ciała, T_f jest temperaturą płynu otaczającego ciało.

W wyniku zastosowania prawa Cattaneo dla strumienia prostopadłego do powierzchni ciała dostajemy [34]

$$\left[\frac{\partial T(t)}{\partial n} \right]_s = -\frac{1}{\lambda} \left[t_k \frac{\partial q_s(t)}{\partial t} + q_s(t) \right] \quad (2.2.18)$$

gdzie n jest współrzędną prostopadłą do powierzchni ciała. Po uwzględnieniu prawej strony równania (2.2.17) otrzymujemy [4]

$$\left[\frac{\partial T(t)}{\partial n} \right]_s = -\frac{\alpha}{\lambda} \left[t_k \frac{\partial T_s(t)}{\partial t} + T_s(t) - T_f \right] \quad (2.2.19)$$

Warunki brzegowe czwartego rodzaju zakładają równość temperatur oraz gęstości strumieni ciepła w miejscu styku dwóch ciał

$$T_{s1}(t) = T_{s2}(t) \quad (2.2.20)$$

$$q_{s1}(t) = q_{s2}(t) \quad (2.2.21)$$

W przypadku modelu hiperbolicznego należy wykorzystać zależność pomiędzy gradientem temperatury a gęstością strumienia w postaci (2.2.1), a nie prawo Fouriera (2.1.2). Przy założeniu, że dla $t=0$ jest $q=0$ można z równania (2.2.1) otrzymać jawny związek pomiędzy strumieniem a temperaturą [5, 51]

$$q(t) = \frac{-k}{t_k} e^{-t/t_k} \int_0^t e^{\eta/t_k} \frac{\partial T}{\partial x} d\eta \quad (2.2.22)$$

Wykorzystując zależność (2.2.22) można warunek (2.2.21) przedstawić w postaci

$$\frac{-k_1}{t_{k1}} e^{-t/t_{k1}} \int_0^t e^{\eta/t_{k1}} \frac{\partial T_1}{\partial x} d\eta = \frac{-k_2}{t_{k2}} e^{-t/t_{k2}} \int_0^t e^{\eta/t_{k2}} \frac{\partial T_2}{\partial x} d\eta \quad (2.2.23)$$

2.2.4. Hiperboliczny model przewodzenia ciepła a druga zasada termodynamiki

Podczas analizy rozwiązań hiperbolicznego równania przewodnictwa cieplnego zauważono, że model hiperboliczny zezwala na samorzutny przepływ ciepła w kierunku wzrostu temperatury, patrz np. [58]. W takich przypadkach iloczyn skalarny $\mathbf{q} \cdot \nabla T$ jest dodatni i zgodnie z równaniem (2.1.11) wydajność źródła entropii σ może być ujemna. Z równania (2.1.11) wynika, że nawet przy $\mathbf{q} \cdot \nabla T > 0$ wydajność źródła entropii σ może być dodatnia, pod warunkiem, że wydajność źródła ciepła g jest dostatecznie duża. W celu wyeliminowania niezgodności falowego modelu transportu ciepła z drugą zasadą termodynamiki podjęto

liczne próby innego sformułowania falowego równania przewodnictwa cieplnego, patrz np. [58]. Odmiernym sposobem rozwiązania tego problemu jest modyfikacja klasycznej termodynamiki procesów nierównowagowych opartej na postulacie lokalnej równowagi termodynamicznej. Tak zwana rozszerzona termodynamika procesów nierównowagowych [24] wprowadza pojęcie uogólnionej nierównowagowej entropii, która jest nie tylko funkcją klasycznych parametrów stanu, ale także dyssypatywnych strumieni. Zgodnie z [24], w przypadku nieodkształcalnych przewodników transportujących ciepło, różniczkę entropii można obliczyć z następującej zależności

$$ds = \frac{c_p}{T} dT - \frac{t_k}{\rho k T^2} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{q} \quad (2.2.24)$$

Po podzieleniu równania (2.2.24) stronami przez dt i podstawieniu do niego wyrażeń na ds/dt oraz dT/dt , wyznaczonych odpowiednio z równań (2.1.10) i (2.1.3), otrzymuje się

$$\sigma = \frac{g}{T} - \frac{\mathbf{q}}{kT^2} \cdot \left(t_k \frac{d\mathbf{q}}{dt} + k\nabla T \right) \quad (2.2.25)$$

Wyrażenie w nawiasach po prawej stronie równania (2.2.25) jest równe $-\mathbf{q}$ wyznaczonemu z równania (2.2.1). Równanie (2.2.25) może być więc przepisane w postaci

$$\sigma = \frac{g}{T} + \frac{\mathbf{q}^2}{kT^2} \quad (2.2.26)$$

Z równania (2.2.26) wynika, że przy $g \geq 0$ wydajność źródła entropii σ jest zawsze nieujemna. Hiperboliczne równanie przewodnictwa cieplnego jest więc zgodne z drugą zasadą rozszerzonej termodynamiki procesów nierównowagowych.

Warto zauważyć, że dla $t_k = 0$ równanie (2.2.24) redukuje się do równania (2.1.9), a równanie (2.2.25) do równania (2.1.11).

2.2.5. Analogia pomiędzy transportem ciepła a ruchem punktu materialnego w ośrodku stawiającym opór

Równanie ruchu punktu materialnego w ośrodku stawiającym opór wprost proporcjonalny do prędkości punktu ma następującą postać

$$r\dot{w} + m \frac{dw}{dt} = F(t) \quad (2.2.27)$$

gdzie r jest współczynnikiem oporu, w prędkością punktu, m jego masą, a $F(t)$ siłą

zewnątrzną działającą na punkt. Można łatwo zauważyć, że równanie (2.2.27) ma formę analogiczną do równania Cattaneo (2.2.1). Porównanie tych dwóch równań prowadzi do wniosku, że ujemny gradient temperatury $-\nabla T$ odpowiada sile $F(t)$, wektor gęstości strumienia ciepła \mathbf{q} prędkości w , opór przewodzenia ciepła $1/k$ współczynnikowi oporu r , a iloraz t_k/k masie m . Dla stanu ustalonego równanie (2.2.27) redukuje się do

$$rw = F \quad (2.2.28)$$

a równanie Cattaneo (2.2.1) redukuje się do klasycznego równania Fouriera (2.1.2).

Z równania (2.2.27) wynika, że dla danej siły i danego współczynnika oporu im mniejsza jest masa punktu, tym wyższe jest tempo zmiany prędkości (przyspieszenie) punktu. Analogicznie, dla danego gradientu temperatury i oporu przewodzenia ciepła im krótszy jest czas relaksacji, tym wyższe jest tempo zmiany strumienia ciepła podczas relaksacyjnego okresu przewodzenia ciepła. Natomiast z równania (2.2.28) wynika, że w przypadku stanu stacjonarnego im większa jest siła działająca na punkt oraz im mniejszy jest współczynnik oporu, tym większa jest prędkość punktu. Analogicznie, im wyższy jest gradient temperatury oraz im mniejszy jest opór przewodzenia, tym większy płynie strumień ciepła.

Założmy, że siła działająca na punkt zgodnie z kierunkiem ruchu w pewnym momencie zmienia kierunek na przeciwny. Z powodu swojej bezwładności punkt przez pewien czas porusza się w tym samym kierunku, przeciwnym do kierunku siły, lecz jego prędkość spada. Po pewnym czasie punkt zatrzymuje się, a następnie zaczyna poruszać się zgodnie z kierunkiem działania siły. Taki same właściwości ma model przewodzenia ciepła Cattaneo. Po zmianie kierunku wektora gradientu temperatury, przez pewien czas ciepło płynie zgodnie z kierunkiem wektora gradientu, to jest z miejsca o temperaturze niższej do miejsca o temperaturze wyższej. Spowodowane jest to bezwładnością strumienia ciepła lub mówiąc bardziej precyzyjnie, bezwładnością nośników ciepła, tzn. elektronów i fononów.

2.2.6. Rozwiązania równania Cattaneo dla jednowymiarowych przypadków skokowej zmiany gradientu temperatury

Założmy, że w punkcie x_o ciała płynie stacjonarny strumień ciepła $q_{x_o} = -kG_o$. W chwili $t = 0$ gradient temperatury w x_o zmienia się skokowo od G_o do $G_s = const$. Dla tego przypadku równanie Cattaneo przybiera postać

$$t_k \frac{dq_x}{dt} + q_x = -kG_s \quad (2.2.29)$$

a warunek początkowy można przedstawić następująco

$$q_x(0) = q_{x_0} = -kG_o \quad (2.2.30)$$

Natomiast wyrażenie na źródło entropii (2.1.11) redukuje się tu do

$$\sigma = -q_x(dT/dx)/T^2 \quad (2.2.31)$$

Rozwiązaniem zagadnienia początkowego (2.2.29) i (2.2.30) jest funkcja

$$q_x = -k[G_s + (G_o - G_s)\exp(-t/t_k)] \quad (2.2.32)$$

Rozważymy teraz cztery przypadki specjalne zagadnienia początkowego (2.2.29) i (2.2.30).

Przypadek 1, $G_o=0$. W tym przypadku początkowa wartość gęstości strumienia ciepła q_{x_0} jest równa zero. Jest to przypadek tożsamy z przypadkiem rozpatrywanym w punkcie 2.2.2. Rozwiązanie (2.2.32) upraszcza się tutaj do formy (porównaj wzór (2.2.9))

$$q_x = -kG_s[1 - \exp(-t/t_k)] \quad (2.2.33)$$

Gęstość strumienia ciepła rośnie wykładniczo od zera do wartości wynikającej z klasycznego prawa Fouriera $q_{x_s} = -kG_s$.

Przypadek 2, $G_s=0$. Tutaj rozwiązanie (2.2.32) redukuje się do

$$q_x = -kG_o \exp(-t/t_k) \quad (2.2.34)$$

Po skokowym zmniejszeniu gradientu temperatury do zera, gęstość strumienia ciepła maleje wykładniczo od wartości początkowej $q_{x_0} = -kG_o$ do zera.

Przypadek 3, $G_oG_s>0$. Zmienia się moduł wektora gradientu temperatury, lecz jego zwrot pozostaje niezmienny. Gęstość strumienia ciepła zmienia się wykładniczo od $q_{x_0} = -kG_o$ do $q_{x_s} = -kG_s$.

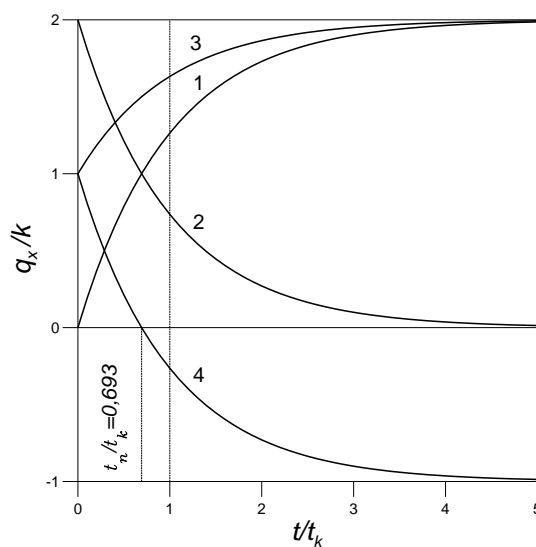
Przypadek 4, $G_oG_s<0$. Zarówno moduł wektora gradientu temperatury, jak i jego zwrot ulegają zmianie. Gęstość strumienia ciepła maleje od wartości $q_{x_0} = -kG_o$ do zera w czasie

$$t_n = t_k \ln(1 - G_o/G_s) \quad (2.2.35)$$

Następnie zmienia się kierunek przepływu ciepła i gęstość strumienia ciepła zaczyna wzrastać od zera do $q_{x_s} = -kG_s$. Dla $t < t_n$ ciepło płynie w kierunku wektora gradientu temperatury,

tzn. w kierunku wzrostu temperatury. Przepływ ten może być uzasadniony fizykalnie bezwładnością nośników ciepła. Dla $t < t_n$ jest $q_x(dT/dx) > 0$, czyli zgodnie z równaniem (2.2.31) dostajemy $\sigma < 0$, co oznacza niezgodność modelu Cattaneo z drugą zasadą klasycznej termodynamiki nierównowagowej.

Wyniki obliczeń dla czterech przypadków omówionych powyżej są przedstawione w formie graficznej na rys. 2.2.2. Numer krzywej odpowiada numerowi odpowiedniego przypadku.



Rys. 2.2.2. Zależność q_x/k od t/t_k dla różnych wartości G_o oraz G_s ; krzywa nr 1: $G_o = 0$, $G_s = -2$ K/cm, krzywa nr 2: $G_o = -2$ K/cm, $G_s = 0$, krzywa nr 3: $G_o = -1$ K/cm, $G_s = -2$ K/cm, krzywa nr 4: $G_o = -1$ K/cm, $G_s = 1$ K/cm

Na rysunku widać, że czas, w którym ciepło płynie w kierunku wzrostu temperatury, jest rzędu czasu relaksacji strumienia ciepła t_k . Długość relaksacyjnego okresu przewodzenia ciepła wynosi około $5t_k$. Po tym czasie gęstość strumienia ciepła jest w przybliżeniu równa wartości wynikającej z klasycznego prawa Fouriera.

2.2.7. Czasy relaksacji strumienia ciepła

W ciałach stałych występują różne mechanizmy przewodzenia ciepła. Za przewodzenie ciepła odpowiedzialne są nośniki energii, którymi w przypadku metali są elektrony i fonony, w przypadku niemetali o budowie krystalicznej fonony. Podczas przewodzenia ciepła przekazywanie energii następuje w trakcie zderzeń nośników. W ciałach o budowie krystalicznej mogą mieć miejsce oddziaływania typu: elektron-elektron, elektron-fonon oraz fonon-fonon. Każdemu z tych oddziaływań odpowiada charakterystyczny czas relaksacji. W

modelu Cattaneo występuje jeden czas relaksacji, który można interpretować jako średni czas relaksacji dla wszystkich występujących w przewodniku oddziaływań nośników lub jako czas relaksacji dla oddziaływań, które w danym przypadku są dominującą formą transportu ciepła.

Wartość liczbowa czasu relaksacji strumienia ciepła występującego w równaniu Cattaneo (2.2.1) oraz w hiperbolicznym równaniu przewodnictwa cieplnego (2.2.3) i (2.2.4) można wyznaczyć z zależności (2.2.5) pod warunkiem, że znana jest prędkość fali cieplnej. Do tej pory nie przeprowadzono jednak systematycznych pomiarów prędkości fali cieplnej w materiałach mających znaczenie inżynierskie. W literaturze są dostępne jedynie bardzo nieliczne i szątkowe dane. Dlatego też najczęściej zachodzi konieczność oszacowania czasu relaksacji strumienia ciepła na podstawie analizy fizycznej mechanizmu transportu ciepła lub użycia wzorów sformułowanych na podstawie bardzo uproszczonych modeli zjawiska. W ogólności czas relaksacji jest funkcją temperatury [64, 66]. Przewiduje się, że jego wartość jest szczególnie duża dla temperatur leżących w pobliżu zera bezwzględnego. Wynika to ze związku pomiędzy czasem relaksacji a średnią drogą swobodną nośników ciepła - elektronów i fononów. W miarę obniżania temperatury przewodnika rośnie średnia droga swobodna nośników, a tym samym wzrasta czas relaksacji. Na przykład, w przypadku krystalicznego helu średnia droga swobodna fononów wzrasta 1000 razy po obniżeniu temperatury od 1,04 K do 0,7 K [6].

Bezpośredniego pomiaru prędkości fali termicznej pierwszy dokonał Peshkov [56]. Uzyskał on dla nadciekłego helu II o temperaturze 1,4 K wynik 19 m/s. Ackerman et al. [1] zmierzili prędkość fali termicznej w helu w stanie stałym, wynosiła ona około 160 m/s. Tzou [63] na podstawie pomiaru prędkości propagacji szczeliny w stali 4340 o temperaturze 480 °C [71] oszacował, że prędkość fali termicznej w badanym przypadku jest rzędu 900 m/s, co daje czas relaksacji rzędu 10^{-11} s. Kamiński [25] zmierzył prędkość propagacji ciepła w ciałach o złożonej strukturze zawierających wilgoć (m.in. w: piasku, NaHCO_3 , warstwie szklanych kuleczek) otrzymując wartości od 0,064 do 0,152 mm/s.

Poniżej zostaną podane wartości liczbowe lub metody wyznaczania prędkości fali termicznej lub czasu relaksacji strumienia ciepła, jakie proponowane są w literaturze. Szersze uzasadnienie podanych wartości i metod można znaleźć we wskazanych publikacjach.

Chester [12] zaproponował, aby w przypadku krystalicznych niemetali przyjmować prędkość fali termicznej równą $w_F / \sqrt{3}$, gdzie w_F jest prędkością fononów. Weymann [69] stwierdził, że najczęściej prędkość fali termicznej w ciałach stałych jest znacznie mniejsza od prędkości dźwięku. Możliwe są jednak przypadki, że prędkość ta będzie nawet 10 razy

większa od prędkości dźwięku. Baumeister et al. [5] podali, że zazwyczaj dyfuzyjność cieplna a jest około 10 rzędów mniejsza niż kwadrat prędkości fali termicznej w^2 . Maurer [48] oszacował, że czas relaksacji dla jednowartościowych metali w temperaturze 0°C jest rzędu 10^{-14} s. Chan et al. [11] przewidują, że prędkość fali termicznej w ciałach krystalicznych jest zawarta w przedziale od prędkości dźwięku do prędkości gazu elektronów swobodnych, tzn. od 5000 m/s do 87000 m/s dla umiarkowanych temperatur. Ponieważ dominującą formą transportu ciepła w niemetalech jest transport fononowy, a w metalach transport elektronowy, ta pierwsza wartość jest właściwsza dla niemetali, a druga dla metali.

Vedavarz et al. [66] podali szacunkowe wartości czasów relaksacji dla różnych materiałów i dla trzech zakresów temperatury: dla temperatur kriogenicznych, dla temperatur pokojowych i dla temperatur wysokich. Przykładowo, dla aluminium czas relaksacji wynosi $10^{-11} - 10^{-6}$ s dla temperatur kriogenicznych, $10^{-14} - 10^{-11}$ s dla temperatury pokojowej oraz $<10^{-14}$ s dla wysokich temperatur. Czas relaksacji dla nadprzewodników niskotemperaturowych dla temperatur kriogenicznych jest równy 10^{-8} s, natomiast dla nadprzewodnika wysokotemperaturowego YBaCuO czas ten ma wartość 10^{-10} s dla temperatur kriogenicznych oraz 10^{-12} s dla temperatury pokojowej. Dla żywych tkanek czas relaksacji wynosi 10-1000 s dla temperatur kriogenicznych oraz 1-100 s dla temperatury pokojowej.

Wzór na prędkość fali termicznej oparty na modelu mikroskopowym podał Tzou [64]

$$w = \left(\frac{kG}{C_e C_d} \right)^{1/2} \quad (2.2.36)$$

gdzie współczynnik G charakteryzujący siłę oddziaływania elektron-fonon można, w zakresie obowiązywania prawa Widemanna-Franza-Lorenza, obliczyć z zależności

$$G = \pi^4 (n_e w_d K)^2 / k \quad (2.2.37)$$

We wzorach (2.2.36) i (2.2.37) C_e , C_d są odpowiednio pojemnościami cieplnymi gazu elektronowego i sieci krystalicznej, k współczynnikiem przewodnictwa cieplnego, n_e liczbą elektronów w jednostce objętości, w_d prędkością dźwięku, K stałą Boltzmann.

2.3. Model relaksacyjny

2.3.1. Bezwładne źródło ciepła oraz niestacjonarna wydajność źródła

Z równania (2.1.8) wynika, że w przypadku zależności wydajności źródła ciepła od temperatury, zmiana temperatury skutkuje natychmiastową zmianą wydajności źródła, odpowiednią do zmiany temperatury. W rzeczywistości źródło osiąga nową wydajność z pewnym opóźnieniem. Możemy powiedzieć, że takie źródło charakteryzuje się bezwładnością, a jego wydajność podlega zjawisku relaksacji. Oznacza to, że źródła, których wydajność opisuje taka sama funkcja mogą w rzeczywistości produkować różne ilości ciepła, w zależności od tego, czy proces przewodzenia i generacji ciepła jest stacjonarny, czy niestacjonarny. Wydajność źródła zdefiniowaną równaniem (2.1.8) nazwiemy stacjonarną wydajnością źródła. Podobnie jak prawo Fouriera (2.1.2) wydajność stacjonarna powinna być w zasadzie wykorzystywana tylko do opisu stacjonarnych zjawisk przewodzenia ciepła.

Przykładem bezwładnego źródła ciepła, którego wydajność zależy od temperatury, może być źródło ciepła Joule'a w przewodniku transportującym prąd elektryczny. Niech oporność elektryczna przewodnika zależy od temperatury. Wówczas po zmianie temperatury następuje zmiana oporności przewodnika, a następnie odpowiednia zmiana wydajności źródła ciepła Joule'a, która jest opóźniona w stosunku do zmiany temperatury. Wydajność takiego źródła ciepła podlega więc zjawisku relaksacji.

Wprowadzimy teraz pojęcie niestacjonarnej wydajności źródła ciepła. Założymy, że podczas procesu relaksacji niestacjonarna wydajność źródła, g_t , zmierza do wydajności stacjonarnej g zgodnie z funkcją wykładniczą. Wówczas możemy napisać [36, 37, 41-47]

$$t_g \frac{\partial g_t}{\partial t} + g_t = g \quad (2.3.1)$$

gdzie t_g jest czasem relaksacji wydajności źródła będącym miarą opóźnienia g_t w stosunku do g . Równanie (2.3.1) ma postać analogiczną do równania (2.2.1) i może być ono interpretowane jako zastosowanie standardowego wykładniczego modelu relaksacji do wydajności źródła ciepła. Dla $t_g = 0$ otrzymuje się z równania (2.3.1) równość $g_t = g$. Wielkość czasu relaksacji wydajności wewnętrznego źródła ciepła zależy od charakteru źródła. Na przykład, dla źródła ciepła Joule'a w technicznym nadprzewodniku wielkość tę można oszacować na rząd od kilku dziesiątych ms do kilku ms [8].

Wydajność wewnętrznego źródła ciepła g występująca m.in. w równaniach (2.1.1), (2.1.3) i (2.2.3) jest wydajnością stacjonarną i jak uzasadniono to powyżej powinna być ona

wykorzystywana tylko w stacjonarnym równaniu przewodnictwa cieplnego, chyba że g nie zależy ani od temperatury, ani od czasu. Także gdy dynamika procesu przewodzenia ciepła jest niewielka lub bezwładność źródła ciepła jest nieznaczna, równania przewodnictwa w postaci (2.1.1) oraz (2.2.3), które nie uwzględniają relaksacji wydajności źródła, dają wystarczająco dokładne wyniki.

Wprowadzony tu relaksacyjny model generacji ciepła należy traktować jako jedno z narzędzi umożliwiających lepsze modelowanie procesu generacji ciepła w przewodniku. Można go na przykład użyć wszędzie tam, gdzie zachodzi potrzeba "złagodzenia" skoków wydajności źródła. Model ten jest bardzo uniwersalny, można go zastosować dla źródła o dowolnej wydajności stacjonarnej, tzn. niezależnie od postaci funkcji (2.1.8). Model ten jest zwłaszcza przydatny dla źródeł, których stacjonarna wydajność zależy od temperatury. Nieuwzględnienie bowiem w takich przypadkach wpływu bezwładności źródła na pole temperatury może prowadzić do znacznych błędów obliczeń, jako że wpływ ten akumuluje się wraz z upływem czasu.

2.3.2. Sens fizyczny bezwładnego źródła ciepła

Właściwości równania (2.3.1) definiującego niestacjonarną wydajność źródła ciepła zostaną zilustrowane przykładem włączenia w ciele źródła ciepła o stałej wydajności. Niech w chwili $t=0$ przy $g_t=0$ zostanie włączone źródło o wydajności $g = g_c = const$. Wówczas rozwiązaniem równania (2.3.1) jest funkcja

$$g_t = g_c [1 - \exp(-t/t_g)] \quad (2.3.2)$$

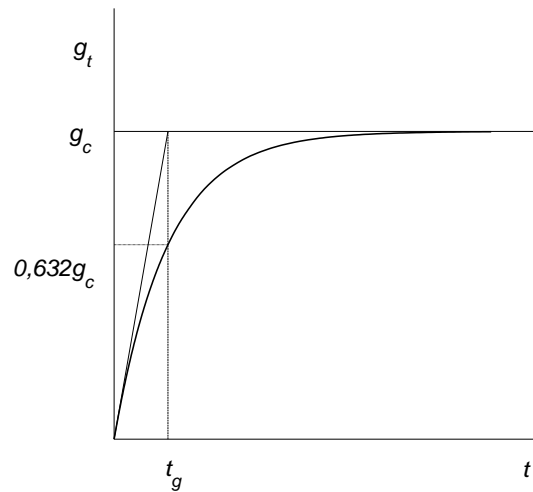
analogiczna do funkcji (2.2.9) i (2.2.33) opisujących relaksację strumienia ciepła. Zgodnie z równaniem (2.3.2) niestacjonarna wydajność źródła wzrasta wykładniczo od zera do wartości stacjonarnej g_c . Dla $t=t_g$ otrzymujemy $g_t \cong 0,632g_c$. Jeżeli $dg_t/dt(t)$ miałoby stałą wartość równą g_c/t_g , to wówczas $g_t(t_g) = g_c$. Przy $t_g=0$, g_t natychmiast osiąga wartość g_c , gdyż równania (2.3.1) oraz (2.3.2) redukują się do $g_t = g$. Przebieg funkcji (2.3.2) przedstawiono na rys. 2.3.1.

Relaksację wydajności źródła można rozumieć jako zjawisko skończonej prędkości dostosowywania się wydajności do zmian parametrów, od których zależy wydajność. W przypadku źródła pozbawionego bezwładności, każdej zmianie parametrów towarzyszy natychmiastowa zmiana wydajności. Natomiast niestacjonarna wydajność źródła bezwładnego narasta ze skończoną prędkością do nowej wartości odpowiadającej zmienio-

nym parametrom.

2.3.3. Relaksacyjne równanie przewodnictwa cieplnego

Relaksacyjny model matematyczny przewodzenia i generacji ciepła składa się z równania Cattaneo (2.2.1), równania definiującego niestacjonarną wydajność wewnętrznego źródła ciepła (2.3.1) oraz równania bilansu energii w postaci (2.1.3), w którym stacjonarna wydajność źródła jest zastąpiona przez wydajność niestacjonarną



Rys. 2.3.1. Zależność niestacjonarnej wydajności wewnętrznego źródła ciepła od czasu po włączeniu źródła o stałej wydajności stacjonarnej

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + g_t \quad (2.3.3)$$

Eliminacja z równań (2.2.1), (2.3.1) i (2.3.3) \mathbf{q} oraz g_t prowadzi do następującego relaksacyjnego równania przewodzenia i generacji ciepła [36, 37, 41-47]

$$t_k t_g \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} + (t_k + t_g) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = t_g a \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 T + a \nabla^2 T + \frac{1}{\rho c_p} \left(t_k \frac{\partial g}{\partial t} + g \right) \quad (2.3.4)$$

Równanie (2.3.4) można również uzyskać z równań (2.2.4) oraz (2.3.1). Po zastąpieniu w równaniu (2.2.4) g przez g_t i wyeliminowaniu g_t z układu (2.2.4) i (2.3.1) w wyniku dostajemy również równanie (2.3.4). Równanie (2.3.4) uwzględnia zarówno skończoną prędkość rozchodzenia się ciepła (relaksację strumienia ciepła) jak i relaksację wydajności wewnętrznego źródła ciepła. Dla $t_g = 0$ równanie (2.3.4) redukuje się do hiperbolicznego równania przewodnictwa cieplnego w postaci (2.2.4), natomiast dla $t_g = t_k = 0$ równanie to redukuje się do parabolicznego równania przewodnictwa cieplnego (2.1.1).

W ogólności stacjonarna wydajność źródła ciepła g może być funkcją współrzędnych, czasu i temperatury. W przypadku, gdy g nie zależy od temperatury, równanie (2.3.1) nie jest sprzężone z równaniami (2.2.1) oraz (2.3.3) i można je scałkować oddzielnie [36]. Wówczas po wyrugowaniu \mathbf{q} z układu równań (2.2.1) i (2.3.3) i podstawieniu wyrażenia na g_t otrzymuje się równanie relaksacyjne, które jest równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu. Równanie to ma postać (2.2.4), z tym że stacjonarna wydajność źródła g jest zastąpiona funkcją opisującą wydajność niestacjonarną g_t .

2.3.4. Relaksacyjne równanie przewodnictwa cieplnego a druga zasada termodynamiki

Sprawdzimy, czy wprowadzenie niestacjonarnej wydajności źródła ciepła g_t do równania bilansu energii (2.1.3) może spowodować naruszenie drugiej zasady termodynamiki. W rozważanym przypadku równanie (2.1.12) przyjmuje formę

$$\sigma = \frac{g_t}{T} + \frac{k(\nabla T)^2}{T^2} \quad (2.3.5)$$

a równanie (2.2.26) przechodzi w

$$\sigma = \frac{g_t}{T} + \frac{\mathbf{q}^2}{kT^2} \quad (2.3.6)$$

Zgodnie z równaniami (2.3.5) i (2.3.6) całkowita wydajność źródła entropii jest sumą dwóch składników: pierwszego wynikającego z generacji ciepła przez źródło i drugiego wynikającego z nieodwracalnego przewodzenia ciepła. Drugi składnik jest zawsze nieujemny. W celu zbadania, czy pierwszy składnik tej sumy może być ujemny przy $g \geq 0$, przeanalizujemy ewolucję g_t po zmianie g o pewien przyrost Δg . Założymy, że w chwili początkowej $g_t = g$. Rozwiązaniem równania (2.3.1) dla $g + \Delta g = \text{const}$ jest funkcja

$$g_t = g + \Delta g [1 - \exp(-t/t_g)] \quad (2.3.7)$$

Z równania (2.3.7) wynika, że dla $g + \Delta g \geq 0$ również $g_t \geq 0$, ponieważ $1 \geq \exp(-t/t_g) \geq 0$. Stąd wniosek, że przy $g \geq 0$ wydajność źródła entropii σ określona równaniami (2.3.5) i (2.3.6) jest również zawsze nieujemna. Charakterystyczną cechą modelu bezwładnego źródła ciepła danego równaniem (2.3.1) jest to, że po każdej zmianie g , g_t zmierza do g , aby osiągnąć je w granicy dla $t \rightarrow \infty$. Tak długo jak g jest dodatnie, g_t jest także dodatnie. Można więc na podstawie przeprowadzonej tu analizy stwierdzić, że wprowadzenie

niestacjonarnej wydajności źródła ciepła do równania bilansu energii nie prowadzi do przekroczenia drugiej zasady termodynamiki. Do badania właściwości równania (2.3.1) można również posłużyć się analogią pomiędzy tym równaniem, a równaniem (2.2.27). Tak jak punkt materialny nie zmienia kierunku ruchu, gdy kierunek działania siły jest stały, tak niestacjonarna wydajność źródła nie zmienia znaku przy stałym znaku wydajności stacjonarnej.

2.3.5. Relaksacyjny model przewodzenia i generacji ciepła w zmiennych bezwymiarowych

Zdefiniujemy następujące zmienne bezwymiarowe

$$X = x/(2wt_k) \quad (2.3.8)$$

$$Y = y/(2wt_k) \quad (2.3.9)$$

$$Z = z/(2wt_k) \quad (2.3.10)$$

$$\tau = t/(2t_k) \quad (2.3.11)$$

$$\Theta = (T - T_0)/(T_m - T_0) \quad (2.3.12)$$

$$\Phi = \mathbf{q}/[w\rho c_p(T_m - T_0)] \quad (2.3.13)$$

$$\Psi = gt_k[\rho c_p(T_m - T_0)] \quad (2.3.14)$$

gdzie X, Y, Z są bezwymiarowymi współrzędnymi liniowymi, τ jest bezwymiarowym czasem, Θ bezwymiarową temperaturą, Φ wektorem bezwymiarowej gęstości strumienia ciepła, Ψ bezwymiarową wydajnością wewnętrznego źródła ciepła, w prędkością fali termicznej, a T_0 i T_m są dowolnymi temperaturami odniesienia. W szczególności może być $T_0 = 0$.

Sens fizyczny bezwymiarowego czasu i bezwymiarowej temperatury jest oczywisty. Poniżej zajmiemy się interpretacją fizyczną pozostałych zmiennych bezwymiarowych. Bezwymiarowa współrzędna jest równa połowie ilorazu współrzędnej wymiarowej przez odległość, Δr_k , jaką przebywa front fali termicznej w czasie t_k . Odległość tę określa równanie

$$\Delta r_k = wt_k \quad (2.3.15)$$

Bezwymiarową gęstość strumienia ciepła Baumeister i Hamill [5] nazwali kondukcyjną liczbą Stanton, z uwagi na to, że prawa strona równania (2.3.13) jest tożsama z definicją liczby Stanton dla płynu omywającego ściankę. Jak wiadomo liczba Stanton jest wykorzystywana

przy rozpatrywaniu analogii pomiędzy zjawiskami wymiany ciepła oraz pędu. Wyrażenie na wektor bezwymiarowej gęstości strumienia ciepła (2.3.13) można przekształcić tożsamościowo do postaci

$$\Phi = \frac{\Delta A t_k \mathbf{q}}{\Delta A \Delta r_k \rho c_p (T_m - T_0)} \quad (2.3.16)$$

Φ można więc także interpretować jako stosunek ciepła, które przepływa przez powierzchnię ΔA w czasie t_k , do przyrostu entalpii elementu o objętości $\Delta A \Delta r_k$ spowodowanego wzrostem jego temperatury od T_0 do T_m , gdzie Δr_k jest odległością, jaką pokonuje front fali w czasie t_k (wzór 2.3.15).

Wyrażenie na bezwymiarową wydajność wewnętrznego źródła ciepła można przedstawić w formie

$$\Psi = \frac{\Delta V g t_k}{\Delta V \rho c_p (T_m - T_0)} \quad (2.3.17)$$

Ψ jest więc stosunkiem ciepła wydzielonego w elemencie o objętości ΔV w czasie t_k do przyrostu entalpii tego elementu spowodowanego wzrostem jego temperatury od T_0 do T_m .

Z definicji (2.3.11) wynika, że bezwymiarowy czas relaksacji strumienia ciepła $\tau_k = 0,5$. Dla przypadku jednowymiarowego (obecnie najczęściej analizowanego w literaturze) w czasie Δt front fali termicznej przemieszcza się o $\Delta x = w \Delta t$, stąd po podzieleniu tego równania stronami przez $2w t_k$ i uwzględnieniu definicji (2.3.8) i (2.3.11) otrzymujemy $\Delta X = \Delta \tau$. Jeżeli dla $t = 0$ byłoby $x = 0$, to wówczas otrzymalibyśmy dla frontu fali zależność $X = \tau$.

Bezwymiarowa forma równania bilansu energii (2.3.3) jest następująca

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = -\nabla \cdot \Phi + 2\Psi, \quad (2.3.18)$$

bezwymiarowa forma równania Cattaneo (2.2.1) ma postać

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + 2\Phi = -\nabla \Theta \quad (2.3.19)$$

Natomiast bezwymiarowa forma równania (2.3.1) definiującego niestacjonarną wydajność źródła ciepła jest

$$\tau_s \frac{\partial \Psi_t}{\partial \tau} + \Psi_t = \Psi \quad (2.3.20)$$

W równaniu (2.3.20) $\tau_g = t_g / (2t_k)$ jest bezwymiarowym czasem relaksacji wydajności wewnętrznego źródła ciepła. Dla przypadków, w których procesy relaksacji mogą być pominięte, równania (2.3.19) i (2.3.20) odpowiednio przybierają formę

$$2\Phi = -\nabla\Theta \quad (2.3.21)$$

$$\Psi_t = \Psi \quad (2.3.22)$$

Układ równań (2.3.18) - (2.3.20) można zredukować do następującego relaksacyjnego równania przewodnictwa cieplnego

$$\tau_g \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \tau^3} + (2\tau_g + 1) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \tau_g \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 \Theta + \nabla^2 \Theta + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + 4\Psi \quad (2.3.23)$$

Równanie (2.3.23) uwzględnia skończoną prędkość rozchodzenia się ciepła (relaksację strumienia ciepła) oraz relaksację wydajności wewnętrznego źródła ciepła. Jest ono bezwymiarową formą równania (2.3.4). W przypadku uwzględnienia skończonej prędkości rozchodzenia się ciepła, przy pominięciu relaksacji wydajności wewnętrznego źródła ciepła, przewodzenie ciepła opisuje układ równań (2.3.18), (2.3.19) i (2.3.22). Układ ten może być zredukowany do następującego klasycznego hiperbolicznego równania przewodnictwa cieplnego, które jest bezwymiarową formą równania (2.2.4)

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \nabla^2 \Theta + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + 4\Psi \quad (2.3.24)$$

Równanie (2.3.24) można także uzyskać z równania (2.3.23) po podstawieniu w nim $\tau_g = 0$. W przypadku uwzględnienia relaksacji wydajności wewnętrznego źródła ciepła, przy pominięciu relaksacji strumienia ciepła, model przewodzenia ciepła składa się z układu równań (2.3.18), (2.3.20) i (2.3.21), który można zredukować do następującego równania przewodnictwa

$$2\tau_g \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \tau_g \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 \Theta + \nabla^2 \Theta + 4\Psi \quad (2.3.25)$$

Bezwymiarowa forma klasycznego parabolicznego równania przewodnictwa cieplnego (2.1.1) jest następująca

$$2 \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \nabla^2 \Theta + 4\Psi \quad (2.3.26)$$

Równanie to powstało poprzez wyeliminowanie Φ oraz Ψ_t z układu (2.3.18), (2.3.21) i (2.3.22). Równanie to można także otrzymać przez podstawienie do równania (2.3.25)

$\tau_g = 0$. W przypadku ciał o małym oporze cieplnym, dla których można przyjąć, że gradient temperatury jest w przybliżeniu równy zero, pole temperatury opisywane jest układem złożonym z równania (2.3.18), w którym podstawiono $\nabla \cdot \Phi = 0$, oraz z równania (2.3.20). Układ ten można zredukować do następującego zwyczajnego równania różniczkowego drugiego rzędu

$$\tau_g \frac{d^2\Theta}{d\tau^2} + \frac{d\Theta}{d\tau} = 2\Psi \quad (2.3.27)$$

Dla $\tau_g = 0$ równanie (2.3.27) redukuje się do następującego szczególnego przypadku parabolicznego równania przewodnictwa cieplnego (równanie (2.3.26) dla $\nabla^2\Theta = 0$)

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = 2\Psi \quad (2.3.28)$$

Charakterystyczną cechą bezwymiarowego modelu transportu ciepła ze skończoną prędkością jest to, że bezwymiarowy czas relaksacji strumienia ciepła nie występuje w nim jako jawny parametr (patrz np. równania (2.3.23) i (2.3.24)). Zgodnie z definicją (2.3.11) bezwymiarowy czas relaksacji strumienia ciepła jest stałą o wartości 0,5. Bezwymiarowy czas relaksacji wydajności wewnętrznego źródła ciepła jest natomiast jawnym parametrem w równaniu relaksacyjnym (patrz np. równanie (2.3.23)). Często podczas analizy rozwiązań równań przewodnictwa cieplnego uwzględniających skończoną prędkość strumienia ciepła używane są pojęcia rozwiązań dla krótkiego i długiego czasu. Kryterium rozstrzygającym, czy czas obserwacji zjawiska rozchodzenia się ciepła jest czasem krótkim, czy długim, powinien być czas relaksacji. Czasy porównywalne z czasem relaksacji i czasy od niego mniejsze, powinny być zaliczone do czasów krótkich, natomiast czasy znacznie dłuższe od czasu relaksacji powinny być uznane za długie. Przykładowo, czas rzędu nanosekund jest bardzo długi np. dla jednowartościowych metali, dla których czas relaksacji strumienia ciepła $t_k = 10^{-14}$ s [48], i bardzo krótki dla ciał o złożonej strukturze wewnętrznej [25], dla których t_k może być rzędu dziesiątek sekund. Ponieważ bezwymiarowy czas relaksacji strumienia ciepła $\tau_k = 0,5$, z punktu widzenia relaksacji strumienia ciepła bezwymiarowe czasy rzędu do kilkunastu można zakwalifikować do czasów krótkich.

2.3.6. Warunki graniczne

W relaksacyjnym równaniu przewodnictwa cieplnego występuje trzecia pochodna temperatury względem czasu. Dlatego też musi być sformułowany trzeci warunek

początkowy postaci

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\mathbf{r}, 0) = f_3(\mathbf{r}) \quad (2.3.29)$$

Warunek ten uzyskuje się wykorzystując warunek początkowy dla równania (2.3.1), którego ogólna postać jest następująca

$$g_t(\mathbf{r}, 0, T) = f_4(\mathbf{r}) \quad (2.3.30)$$

Typowa postać warunku początkowego (2.3.30), wynikająca z sensu fizycznego niestacjonarnej wydajności źródła, g_t , jest następująca

$$g_t(\mathbf{r}, 0, T) = 0 \quad (2.3.31)$$

Wprowadzając zależność (2.3.31) do równania (2.3.1) dla $t = 0$ dostajemy

$$\frac{\partial g_t}{\partial t}(\mathbf{r}, 0, T) = \frac{g(\mathbf{r}, 0, T)}{t_g} \quad (2.3.32)$$

Z równania (2.2.4), w którym g zastępujemy przez g_t , otrzymujemy dla $t = 0$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\mathbf{r}, 0) = -\frac{1}{t_k} \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{r}, 0) + \frac{a}{t_k} \nabla^2 T(\mathbf{r}, 0) + \frac{1}{\rho c_p} \left[\frac{\partial g_t}{\partial t}(\mathbf{r}, 0, T) + \frac{g_t(\mathbf{r}, 0, T)}{t_k} \right] \quad (2.3.33)$$

$\frac{\partial g_t}{\partial t}(\mathbf{r}, 0, T)$ występujące w równaniu (2.3.33) zastępujemy teraz przez prawą stronę równania (2.3.32) i wykorzystujemy warunek (2.3.31)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\mathbf{r}, 0) = -\frac{1}{t_k} \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{r}, 0) + \frac{a}{t_k} \nabla^2 T(\mathbf{r}, 0) + \frac{g(\mathbf{r}, 0, T)}{t_g \rho c_p} \quad (2.3.34)$$

W szczególności, gdy

$$T(\mathbf{r}, 0) = const \quad (2.3.35)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{r}, 0) = 0 \quad (2.3.36)$$

$$g(\mathbf{r}, 0, T) = 0 \quad (2.3.36)$$

to

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\mathbf{r}, 0) = 0 \quad (2.3.37)$$

Warunki brzegowe dla zagadnień relaksacyjnych mają analogiczną formę do warunków brzegowych występujących w zagadnieniach hiperbolicznych.