1. Teoria podobieństwa

Figury podobne geometrycznie mają odpowiadające sobie kąty równe, a odpowiadające sobie boki są proporcjonalne

$$\frac{l_1''}{l_1'} = \frac{l_2''}{l_2'} = \cdots = \frac{l_n''}{l_n'} = C_l \tag{1.1}$$

Zjawiska fizyczne mogą być podobne pod warunkiem, że zachodzą w układach podobnych geometrycznie. Odpowiadające sobie wielkości w układach podobnych muszą być jednorodne (takie samo znaczenie fizyczne, taka sama jednostka) i być przypisane odpowiadającym sobie punktom układu i chwilom. W zjawiskach podobnych zachodzi następująca zależność pomiędzy odpowiadającymi sobie wielkościami

$$\frac{\phi''}{\phi'} = C_\phi \tag{1.2}$$

C_φ - stała podobieństwa (niezależna od współrzędnych i czasu)

Stałe podobieństwa dla:

- pola temperatury

$$\frac{T''}{T'} = C_T \tag{1.3}$$

- pola prędkości

$$\frac{w''}{w'} = C_w \tag{1.4}$$

- pola gęstości

$$\frac{\rho''}{\rho'} = C_\rho \tag{1.5}$$

- przewodności cieplnej

$$\frac{\lambda''}{\lambda'} = C_\lambda \tag{1.6}$$

Przy opisie zjawisk złożonych wartości wszystkich stałych podobieństwa nie mogą być przyjmowane dowolnie.

2. Podobieństwo przewodzenia ciepła

Podobieństwo dwóch układów przeanalizujemy na przykładzie równania przewodnictwa cieplnego *Fouriera*. Dla układu pierwszego

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = a'\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2}\right) \tag{2.1}$$

i dla układu podobnego

$$\frac{\partial T''}{\partial t''} = a''\left(\frac{\partial^2 T''}{\partial x''^2} + \frac{\partial^2 T''}{\partial y''^2} + \frac{\partial^2 T''}{\partial z''^2}\right) \tag{2.2}$$

Stała podobieństwa pola temperatury

$$C_T = \frac{T''}{T'} \tag{2.3}$$

Stała podobieństwa czasu

$$C_t = \frac{t''}{t'} \tag{2.4}$$

Stała podobieństwa dla dyfuzyjności cieplnej

$$C_a = \frac{a''}{a'} \tag{2.5}$$

Stała podobieństwa dla współrzędnych

$$C_l = \frac{x''}{y'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'} = \frac{l''}{l'} \tag{2.6}$$

Wielkości fizyczne dla układu podobnego można więc przedstawić jako

$$T'' = C_T T' \tag{2.7}$$

$$t'' = C_t t' \tag{2.8}$$

$$a'' = C_a a' \tag{2.9}$$

$$x'' = C_l x' \tag{2.10}$$

$$y'' = C_l y' \tag{2.11}$$

$$z'' = C_l z' \tag{2.12}$$

Podstawiamy teraz zależności (2.7)-(2.12) do równania (2.2)

$$\frac{C_T}{C_t}\frac{\partial T'}{\partial t'} = \frac{C_a C_T}{C_l^2} a' \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2} \right) \tag{2.13}$$

Równania (2.1) i (2.13) powinny mieć takie same rozwiązania ze względu na zmienne oznaczone „*prim*”. Równania te są tożsamościowe, gdy

$$\frac{C_T}{C_t} = \frac{C_a C_T}{C_l^2} \tag{2.14}$$

Po uwzględnieniu definicji (2.3)-(2.6) dostajemy z (2.14)

$$\frac{a't'}{l'^2} = \frac{a''t''}{l''^2} = \mathrm{Fo} \tag{2.15}$$

Fo – liczba podobieństwa Fouriera (liczba Fouriera)

Pola temperatury w ciałach stałych, podobnych geometrycznie, zmieniają się w sposób podobny w czasie, gdy są jednakowe liczby Fouriera.

3. Podobieństwo wnikania (przejmowania) ciepła I

Warunek brzegowy trzeciego rodzaju dla pierwszego układu

$$-\lambda' \left(\frac{\partial T'}{\partial n'} \right)_w = \alpha' \left(T'_w - T'_f \right) \tag{3.1}$$

a dla układu podobnego

$$-\lambda'' \left(\frac{\partial T''}{\partial n''} \right)_w = \alpha'' \left(T''_w - T''_f \right) \tag{3.2}$$

Stałe podobieństwa

$$C_T = \frac{T''}{T'} \tag{3.3}$$

$$C_l = \frac{n''}{n'} \tag{3.4}$$

$$C_\alpha = \frac{\alpha''}{\alpha'} \tag{3.5}$$

$$C_\lambda = \frac{\lambda''}{\lambda'} \tag{3.6}$$

Z równań (3.3)-(3.6) wyznaczamy wielkości oznaczone „*bis*" i podstawiamy do równania (3.2)

$$-\frac{C_\lambda C_T}{C_l}\lambda'\left(\frac{\partial T'}{\partial n'}\right)_w = C_\alpha C_T \alpha'\left(T'_w - T'_f\right) \tag{3.7}$$

Równania (3.1) i (3.7) są tożsamościowe, gdy

$$\frac{C_\alpha C_l}{C_\lambda} = 1 \tag{3.8}$$

czyli

$$\frac{\alpha' l'}{\lambda'} = \frac{\alpha'' l''}{\lambda''} = \mathrm{Bi} \tag{3.9}$$

Bi – liczba (podobieństwa) *Biota*

λ', λ" – współczynniki przewodzenia ciepła dla <u>ścianki</u>

Równość liczb *Biota* świadczy o podobieństwie wnikania ciepła.

4. Podobieństwo wnikania (przejmowania) ciepła II

Równanie wymiany ciepła na granicy ciała

$$-\lambda'\left(\frac{\partial T'}{\partial n'}\right)_w = \alpha'\left(T'_w - T'_f\right) \tag{4.1}$$

a dla układu podobnego

$$-\lambda''\left(\frac{\partial T''}{\partial n''}\right)_w = \alpha''\left(T''_w - T''_f\right) \tag{4.2}$$

λ', λ" – współczynniki przewodzenia ciepła dla <u>płynu</u>

Stałe podobieństwa

$$C_T = \frac{T''}{T'} \tag{4.3}$$

$$C_l = \frac{n''}{n'} \tag{4.4}$$

$$C_\alpha = \frac{\alpha''}{\alpha'} \tag{4.5}$$

$$C_\lambda = \frac{\lambda''}{\lambda'} \tag{4.6}$$

Z równań (4.3)-(4.6) wyznaczamy wielkości oznaczone „bis" i podstawiamy do równania (4.2)

$$-\frac{C_\lambda C_T}{C_l}\lambda'\left(\frac{\partial T'}{\partial n'}\right)_w = C_\alpha C_T \alpha'\left(T'_w - T'_f\right) \tag{4.7}$$

Równania (4.1) i (4.7) są tożsamościowe, gdy

$$\frac{C_\alpha C_l}{C_\lambda} = 1 \tag{4.8}$$

czyli

$$\frac{\alpha' l'}{\lambda'} = \frac{\alpha'' l''}{\lambda''} = \mathrm{Nu} \tag{4.9}$$

Nu jest liczbą podobieństwa *Nusselta*. Równość liczb *Nusselta* świadczy o podobieństwie wnikania ciepła.

5. Twierdzenia (prawa) teorii podobieństwa

Pierwsze twierdzenie teorii podobieństwa (twierdzenie Newtona)

Zjawiska podobne mają jednakowe liczby podobieństwa.

Drugie twierdzenie teorii podobieństwa (twierdzenie Buckinghama) - teoremat Π

Rozwiązanie układu równań opisujących dowolne zjawisko fizyczne daje się przedstawić w formie zależności pomiędzy liczbami podobieństwa

$$f\left(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k\right) = 0 \tag{5.1}$$

gdzie:

$k = n - m$,
n – liczba zmiennych wymiarowych,
m – liczba podstawowych jednostek.

Równanie (5.1) nazywamy równaniem *uogólnionym*.

Trzecie twierdzenie teorii podobieństwa (twierdzenie Kirpiczowa-Guchmana)

Warunkiem koniecznym i wystarczającym podobieństwa dwóch zjawisk fizycznych jest podobieństwo warunków jednoznaczności oraz równość określających liczb podobieństwa.

Nieokreślające liczby podobieństwa można przedstawić jako funkcje określających liczb podobieństwa

$$\Pi_{ni} = g\left(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k\right) \tag{5.2}$$

<u>Warunki jednoznaczności</u>

W celu uzyskania rozwiązań równań różniczkowych wymiany ciepła, które precyzyjnie opisują zjawiska w układach wymieniających ciepło, należy do równań różniczkowych dołączyć warunki jednoznaczności. Do warunków jednoznaczności zaliczamy:

- warunki geometryczne opisujące kształt i wymiary układów wymieniających ciepło,
- warunki fizyczne opisujące właściwości fizyczne układów wymieniających ciepło,
- warunki początkowe (dla przypadków niestacjonarnych) opisujące układy na początku obserwacji zjawiska,

- warunki brzegowe opisujące transport ciepła na granicach układów.

6. Uogólnione równanie wymiany ciepła

Wymiana ciepła podczas przepływu płynu – bez zmiany stanu skupienia.

Dla przypadku niestacjonarnego

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Fo}, \mathrm{Re}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Pr}) \qquad \text{liczba } \textit{Nusselta} \qquad (6.1)$$

$$\mathrm{Fo} = \frac{at}{l^2} \qquad \text{liczba } \textit{Fouriera} \qquad (6.2)$$

$$\mathrm{Re} = \frac{wl}{\nu} \qquad \text{liczba } \textit{Reynoldsa} \qquad (6.3)$$

$$\mathrm{Gr} = \frac{gl^3}{\nu^2}\beta\Delta T \qquad \text{liczba } \textit{Grashofa} \qquad (6.4)$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a} \qquad \text{liczba } \textit{Prandtla} \qquad (6.5)$$

Dla przypadku stacjonarnego

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Pr}) \qquad (6.6)$$

Przypadek stacjonarny – *konwekcja wymuszona*

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}) \qquad (6.7)$$

Przypadek stacjonarny – *konwekcja swobodna*

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Gr}, \mathrm{Pr}) \qquad (6.8)$$

Wykonując badania doświadczalne, których celem jest uzyskanie uogólnionego opisu matematycznego zjawiska, który będzie można rozszerzyć na zjawiska podobne, należy przestrzegać następujących zasad:

- mierzyć należy wszystkie wielkości wchodzące w skład liczb podobieństwa badanego zjawiska,
- wyniki badań należy przedstawić w postaci zależności pomiędzy liczbami podobieństwa.

Uzyskaną w ten sposób zależność pomiędzy liczbami podobieństwa będzie można zastosować do zjawisk, które mają podobne warunki jednoznaczności i jednakowe określające liczby podobieństwa.

Teoria podobieństwa umożliwia:

- przeprowadzenie badań na modelach o mniejszych wymiarach,
- zastosowanie innych czynników (np. tańszych),
- zastosowanie innych parametrów termicznych, np. niższych temperatur i ciśnień.

7. Sens fizyczny liczb podobieństwa

Wyrażenia definiujące liczby podobieństwa często można przekształcić do formy ilorazu wyrażeń będących miarami dwóch różnych zjawisk. Liczby podobieństwa można traktować jako miary wzajemnego oddziaływania tych zjawisk.

<u>Przykłady</u>

Wyrażenie definiujące liczbę Reynoldsa (Re), która charakteryzuje podobieństwo hydrodynamiczne przy konwekcji wymuszonej, może być przedstawione w postaci

$$\mathrm{Re} = \frac{\frac{w^2}{l}}{\frac{\nu \cdot w}{l^2}} \tag{7.1}$$

gdzie w^2/l jest miarą siły bezwładności płynu, $\nu \cdot w/l^2$ jest miarą siły lepkości w tym płynie. Liczba Reynoldsa jest więc miarą stosunku sił bezwładności do sił lepkości.

Wyrażenie definiujące liczbę Nusselta (Nu) można przedstawić w postaci

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha \cdot \Delta T}{\frac{\lambda}{l} \cdot \Delta T} \tag{7.2}$$

gdzie $\alpha \cdot \Delta T$ jest miarą ciepła wnikającego, $\frac{\lambda}{l} \cdot \Delta T$ jest miarą ciepła przewodzonego. Liczba Nusselta jest więc miarą wzrostu strumienia ciepła transportowanego na drodze konwekcji w porównaniu do strumienia jaki byłby transportowany w tej samej warstwie płynu przez czyste przewodzenie. Nu = 1 oznacza, że transport ciepła w warstwie płynu odbywa się tylko na drodze przewodzenia.

Liczba Grashofa Gr jest miarą stosunku sił wyporu do sił lepkości.

Liczba Prandtla Pr jest miarą stosunku ilości przenoszonego ruchu (pędu) do ilości przenoszonego ciepła.