

## PRZEWODZENIE CIEPŁA

### 1. Prawo Fouriera

Przewodzenie ciepła opisuje empiryczne prawo *Fouriera*

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T = -\lambda \nabla T \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (1.1)$$

gdzie:

$\lambda \left[ \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$  - współczynnik przewodzenia ciepła (przewodność cieplna),

$\operatorname{grad} T \left[ \text{K}/\text{m} \right]$  - gradient temperatury.

Dla kartezjańskiego układu współrzędnych prostokątnych

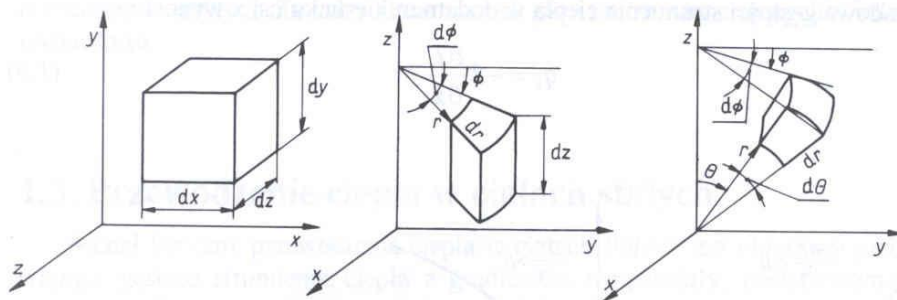
$$\operatorname{grad} T \equiv \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.2)$$

W prostokątnym układzie współrzędnych wektor  $\mathbf{q}$  ma trzy współrzędne

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.3)$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.4)$$

$$q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1.5)$$



Rys. 1.3. Rodzaje układów współrzędnych: a) prostokątny, b) walcowy, c) kulisty

a)  $T = T(x, y, z)$ ; b)  $T = T(r, \varphi, z)$ ; c)  $T = T(r, \varphi, \theta)$

## 2. Gradient

Niech  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  będzie polem skalarnym, np. polem temperatury. Gradientem pola skalarnego  $\varphi$  jest pole wektorowe zdefiniowane następująco

$$\text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (2.1)$$

gdzie  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  są wersorami odpowiednio osi  $x, y, z$ . Niech w punkcie  $P(x_1, y_1, z_1)$  wartość funkcji  $\varphi$  wynosi

$\varphi(x_1, y_1, z_1) = C_1$ . Gradient  $\varphi$  w punkcie  $P$  jest wektorem prostopadłym do powierzchni o równaniu  $\varphi(x, y, z) = C_1$ , wskazującym kierunek (oznaczymy go przez  $n$ ) najszybszego wzrastania funkcji  $\varphi$ . W przypadku pola temperatury powierzchnia  $\varphi(x, y, z) = C_1$  jest powierzchnią *izotermiczną*.

$$\max_l \frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = |\text{grad } \varphi| \quad (2.2)$$

gdzie  $l$  oznacza dowolny kierunek.

Obierzmy punkt  $Q(x_2, y_2, z_2)$  leżący w pobliżu punktu  $P$ , w odległości  $\Delta l$ , przy czym  $\varphi(x_2, y_2, z_2) > \varphi(x_1, y_1, z_1)$ .

Wówczas, przy  $\Delta l \rightarrow 0$ , iloraz

$$\frac{\varphi(x_2, y_2, z_2) - \varphi(x_1, y_1, z_1)}{\Delta l} \quad (2.3)$$

osiągnie maksimum w przypadku, gdy kierunek odcinka  $PQ$  pokryje się z kierunkiem gradientu  $n$ .

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_2, y_2, z_2) - \varphi(x_1, y_1, z_1)}{\Delta l} \quad (2.4)$$

$$= \text{grad} \varphi(x_1, y_1, z_1)$$

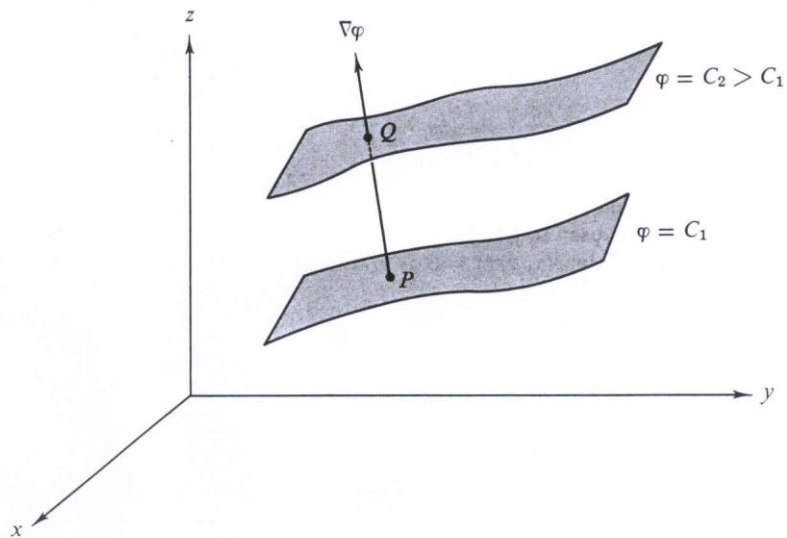
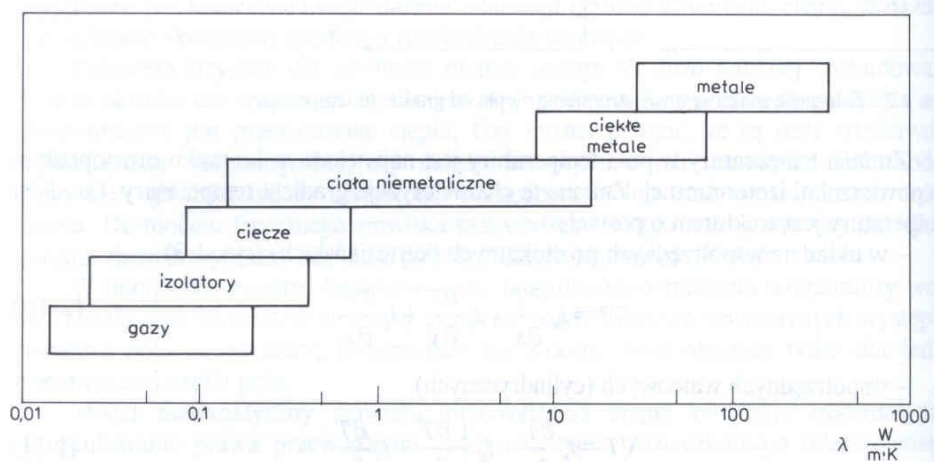


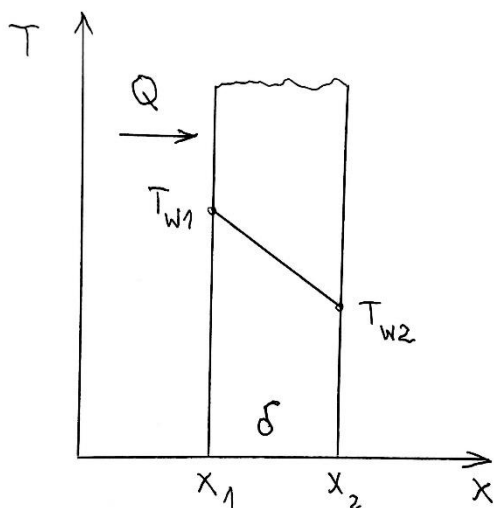
Figure 1.17a Gradient.



Rys. 1.4. Zakresy wartości współczynników przewodzenia ciepła

### 3. Stacjonarne przewodzenie przez ściankę płaską przy $\lambda = \text{const}$

Podczas przewodzenia stacjonarnego przez ściankę płaską gęstość strumienia ciepła jest stała,  $q = \text{idem}$ .



$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad \left[ \frac{W}{m^2} \right] \quad (3.1)$$

Równanie (3.1) rozwiązujemy metodą rozdzielania zmiennych

$$q dx = -\lambda dT \quad (3.2)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} q dx = - \int_{T_{w1}}^{T_{w2}} \lambda dT \quad (3.3)$$

gdzie  $T_{w1} = T(x_1)$  i  $T_{w2} = T(x_2)$ . Po wyznaczeniu całek w równaniu (3.3) dostajemy

$$q(x_2 - x_1) = -\lambda(T_{w2} - T_{w1}) \quad (3.4)$$

Z równania (3.4) wynika, że rozkład temperatury w ściance jest prostoliniowy.

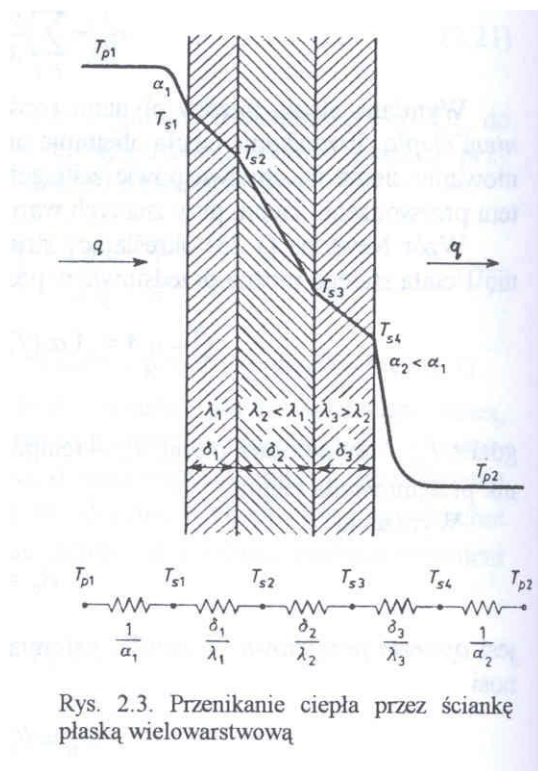
$$q = \frac{\lambda}{\delta}(T_{w1} - T_{w2}) \quad (3.5)$$

gdzie  $\delta = x_2 - x_1$

Dla ścianki o powierzchni  $A$

$$Q = Aq = \frac{A\lambda}{\delta}(T_{w1} - T_{w2}) \quad [W] \quad (3.6)$$

$$\lambda = \frac{Q\delta}{A(T_{w1} - T_{w2})} \quad (3.7)$$



#### 4. Ustalone przewodzenie ciepła przez wielowarstwową ściankę płaską

Prawo Fouriera dla przypadku jednowymiarowego

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad \left[ \frac{W}{m^2} \right] \quad (4.1)$$

Równanie (4.1) całkujemy stronami dla warstwy numer  $i$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} q dx = - \int_{T_i}^{T_{i+1}} \lambda_i dT \quad (4.2)$$

Dla stanu stacjonarnego jest  $q = idem$ . Ponadto założymy  $\lambda_i = const$ , stąd w wyniku całkowania równania (4.2) dostajemy

$$q(x_{i+1} - x_i) = -\lambda_i(T_{i+1} - T_i) \quad (4.3)$$

$$q = \frac{\lambda_i}{\delta_i}(T_i - T_{i+1}) \quad (4.4)$$

gdzie

$$\delta_i = x_{i+1} - x_i \quad (4.5)$$

Równanie (4.4) przekształcimy do postaci

$$T_i - T_{i+1} = q \frac{\delta_i}{\lambda_i} \quad (4.6)$$

i zsumujemy równania (4.6) dla  $i = 1, 2, \dots, n$ , gdzie  $n$  jest liczbą warstw

$$T_1 - T_{n+1} = q \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} \quad (4.7)$$

Po przekształceniu równania (4.7) otrzymujemy

$$q = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} \quad (4.8)$$

Po wymnożeniu stronami równania (4.8) przez powierzchnię wymiany ciepła,  $A$ , dostajemy

$$Q = Aq = \frac{A(T_1 - T_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} \quad [W] \quad (4.9)$$

Równanie (4.9) można przepisać w postaci

$$Q = \frac{A\lambda_z}{\delta}(T_1 - T_{n+1}) \quad (4.10)$$

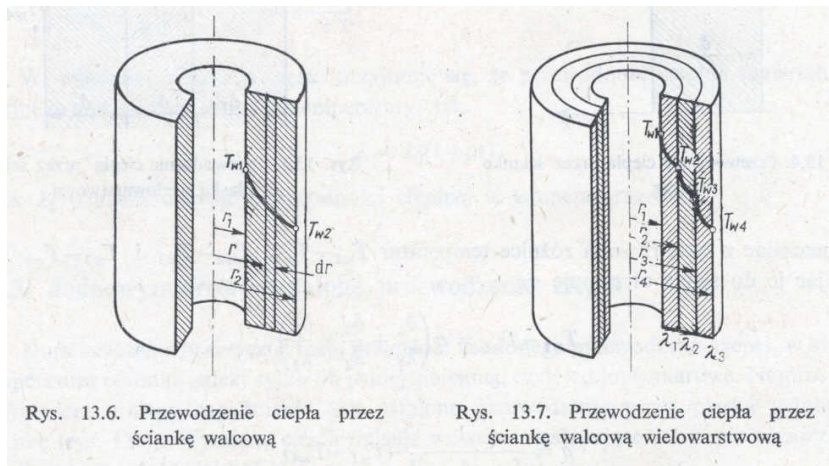
gdzie

$$\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i \quad (4.11)$$

$$\lambda_z = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} \quad (4.12)$$

$\lambda_z$  [W/(m·K)] to zastępczy (równoważny) współczynnik przewodnictwa cieplnego.

### 5. Stacjonarne przewodzenie przez ściankę cylindryczną przy $\lambda = const$



Rys. 13.6. Przewodzenie ciepła przez ściankę walcową

Rys. 13.7. Przewodzenie ciepła przez ściankę walcową wielowarstwową

$$q = -\lambda \frac{dT}{dr} \quad [W/m^2] \quad (5.1)$$

gdzie  $q$  zależy od promienia  $r$

$$q = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2\pi r l} \quad (5.2)$$

natomiast  $Q = const$ .

Podstawiamy prawą stronę równania (5.2) do lewej strony równania (5.1)

$$Q = -2\pi r l \lambda \frac{dT}{dr} \quad [W] \quad (5.3)$$

W równaniu (5.3) rozdzielamy zmienne

$$Q \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -2\pi l \lambda \int_{T_{w1}}^{T_{w2}} dT \quad (5.4)$$

i otrzymane równanie (5.4) całkujemy stronami

$$Q \ln \frac{r_2}{r_1} = -2\pi l \lambda (T_{w2} - T_{w1}) \quad (5.5)$$

Z równania (5.5) wynika, że rozkład temperatury w ściance jest logarytmiczny. Z równania (5.5) wyznaczamy strumień ciepła

$$Q = \frac{2\pi l \lambda}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (T_{w1} - T_{w2}) = \frac{2\pi l \lambda}{\ln \frac{d_2}{d_1}} (T_{w1} - T_{w2}) \quad (5.6)$$

Strumień ciepła odniesiony do jednostki długości rury

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{2\pi \lambda}{\ln \frac{d_2}{d_1}} (T_{w1} - T_{w2}) \quad [W / m] \quad (5.7)$$

## 6. Ustalone przewodzenie ciepła przez wielowarstwową ściankę cylindryczną

Równanie (5.3) całkujemy stronami dla warstwy numer  $i$

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{Q}{r} dr = -2\pi l \int_{T_i}^{T_{i+1}} \lambda_i dT \quad (6.1)$$

Otrzymujemy

$$Q \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} = -2\pi l \lambda_i (T_{i+1} - T_i) \quad (6.2)$$

Z równania (6.2) wyznaczamy strumień ciepła przewodzonego przez warstwę  $i$ . Taki sam strumień ciepła jest przewodzony przez wszystkie warstwy.

$$Q = \frac{2\pi \lambda_i l}{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} (T_i - T_{i+1}) = \frac{2\pi \lambda_i l}{\ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} (T_i - T_{i+1}) \quad (6.3)$$

Równanie (6.3) dla  $i = 1$  jest tożsame z równaniem (5.6). Równanie (6.3) przekształcimy teraz do postaci



$$T_i - T_{i+1} = \frac{Q \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}{2\pi\lambda_i l} \quad (6.4)$$

i zsumujemy równania (6.4) dla  $i = 1, 2, \dots, n$ , gdzie  $n$  jest liczbą warstw. Otrzymujemy

$$T_1 - T_{n+1} = \frac{Q}{2\pi l} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \quad (6.5)$$

Stąd

$$Q = \frac{2\pi l (T_1 - T_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} \quad (6.6)$$

Równanie (6.6) można przedstawić w postaci

$$Q = \frac{2\pi\lambda_z l}{\ln \frac{d_{n+1}}{d_1}} (T_1 - T_{n+1}) \quad (6.7)$$

gdzie

$$\lambda_z = \frac{\ln \frac{d_{n+1}}{d_1}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} \quad \left[ \frac{W}{m \cdot K} \right] \quad (6.8)$$

jest zastępczym (równoważnym) współczynnikiem przewodnictwa cieplnego. Strumień ciepła przewodzonego przez jednostkę długości rury

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{2\pi\lambda_z}{\ln \frac{d_{n+1}}{d_1}} (T_1 - T_{n+1}) \quad \left[ \frac{W}{m} \right] \quad (6.9)$$

## 6. Analogia pomiędzy przewodzeniem ciepła a przewodzeniem prądu elektrycznego - opory cieplne

Dla stacjonarnego przewodzenia ciepła przez ściankę płaską wielowarstwową jest

$$q = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} \left[ \frac{W}{m^2} \right] \quad (7.1)$$

Prawo Ohma ma postać

$$I = \frac{U}{R} \quad (7.2)$$

gdzie  $I$  [A] jest natężeniem prądu elektrycznego,  $U$  [V] napięciem,  $R$  [ $\Omega$ ] oporem elektrycznym.

Analogia pomiędzy wielkościami cieplnymi i elektrycznymi

$$q \rightarrow I \quad (7.3)$$

$$T_1 - T_{n+1} \rightarrow U \quad (7.4)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} \rightarrow R \quad (7.5)$$

Opór cieplny przewodzenia

$$R_\lambda = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n R_{\lambda i} \quad [K/W] \quad (7.6)$$

Równanie (7.1) można przedstawić w postaci

$$q = \frac{T_1 - T_{n+1}}{R_\lambda} \quad (7.7)$$

W przypadku stacjonarnego przewodzenia ciepła przez wielowarstwową ściankę cylindryczną, strumień ciepła przypadający na jednostkową długość rury jest równy

$$q_l = \frac{2\pi(T_1 - T_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} \left[ \frac{W}{m} \right] \quad (7.8)$$

Dla tego przypadku wprowadzimy liniowy opór cieplny jako

$$R_{\lambda l} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} = \sum_{i=1}^n R_{\lambda li} \quad \left[ \frac{m \cdot K}{W} \right] \quad (7.9)$$

Po uwzględnieniu (7.9) równanie (7.8) można przedstawić w postaci

$$q_l = \frac{\pi(T_1 - T_{n+1})}{R_{\lambda l}} \left[ \frac{W}{m} \right] \quad (7.10)$$