Całkowanie numeryczne metodą trapezów

Wzór trapezów

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)$$

Funkcja całkowana

$$\phi(x) := \frac{2\cdot x^3 + 3}{\sin(x)}$$

Funkcja **trapez** obliczająca całkę z funkcji f(*x*) w przedziale *a*, *b* z podziałem przedziału całkowania na *n* części.

$$\text{trapez}(f, a, b, n) := \left|\begin{array}{l} s \leftarrow \dfrac{f(a) + f(b)}{2} \\ h \leftarrow \dfrac{b-a}{n} \\ \text{for } \ i \in 1..n-1 \ \ \text{if } \ n > 1 \\ \quad \left|\begin{array}{l} x_i \leftarrow a + i\cdot h \\ y_i \leftarrow f(x_i) \\ s \leftarrow s + y_i \end{array}\right. \\ s \leftarrow h\cdot s \end{array}\right.$$

$\text{trapez}(\phi, 1, 3, 450) = 102.024$ całka z funkcji $\phi(x)$

$\int_1^3 \phi(x)\,dx = 102.018$ całka obliczona metodą Romberga

Całkowanie numeryczne metodą Simpsona

Wzór Simpsona

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\cdot\left(y_0 + 4\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + 4\cdot y_3 + \ldots + 4\cdot y_{2n-1} + y_{2n}\right)$$

Funkcja całkowana

$$\phi(x) := \frac{2\cdot x^3 + 3}{\sin(x)}$$

Funkcja **Simpson** obliczająca całkę z funkcji f(*x*) w przedziale *a*, *b* z podziałem przedziału całkowania na *n* części (*n* musi być parzyste i nie mniejsze niż 4).

```
Simpson(f ,a ,b ,n) := | n ← 4  if  n < 4
                       | n ← n + 1  if  mod(n ,2) > 0
                       | s ← f(a) + f(b)
                       | h ← (b − a)/n
                       | for  i ∈ 1 ,3 .. n − 1
                       |   | x_i ← a + i·h
                       |   | y_i ← 4·f(x_i)
                       |   | s ← s + y_i
                       | for  i ∈ 2 ,4 .. n − 2
                       |   | x_i ← a + i·h
                       |   | y_i ← 2·f(x_i)
                       |   | s ← s + y_i
                       | s ← (h/3)·s
```

$\text{Simpson}(\phi, 1, 3, 60) = 102.024$ całka z funkcji $\phi(x)$

$\int_1^3 \phi(x)\,dx = 102.018$ całka obliczona metodą Romberga

Ekstrapoplacja Richardsona

Całkowana funkcja

$$\phi(x) := \frac{2\cdot x^3 + 3}{1 + \sin(x)}$$

Funkcja **trapez** obliczająca całkę z funkcji f(*x*) w przedziale *a*, *b* z podziałem przedziału całkowania na *n* części.

$$\mathrm{trapez}(f, a, b, n) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow \dfrac{f(a) + f(b)}{2} \\ h \leftarrow \dfrac{b - a}{n} \\ \text{for } i \in 1 .. n - 1 \quad \text{if } n > 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow a + i\cdot h \\ y_i \leftarrow f(x_i) \\ s \leftarrow s + y_i \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} s \leftarrow h\cdot s \\ h \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Całka obliczona metodą Romberga

$$I_R := \int_1^3 \phi(x)\, dx \qquad I_R = 29.5$$

Błąd przybliżenia całki

$$\Delta I(I) := \frac{I - I_R}{I_R}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ h_1 \end{pmatrix} := \mathrm{trapez}(\phi, 1, 3, 4) \qquad I_1 = 31.3 \qquad h_1 = 0.5 \qquad \Delta I(I_1) = 6.090\,\%$$

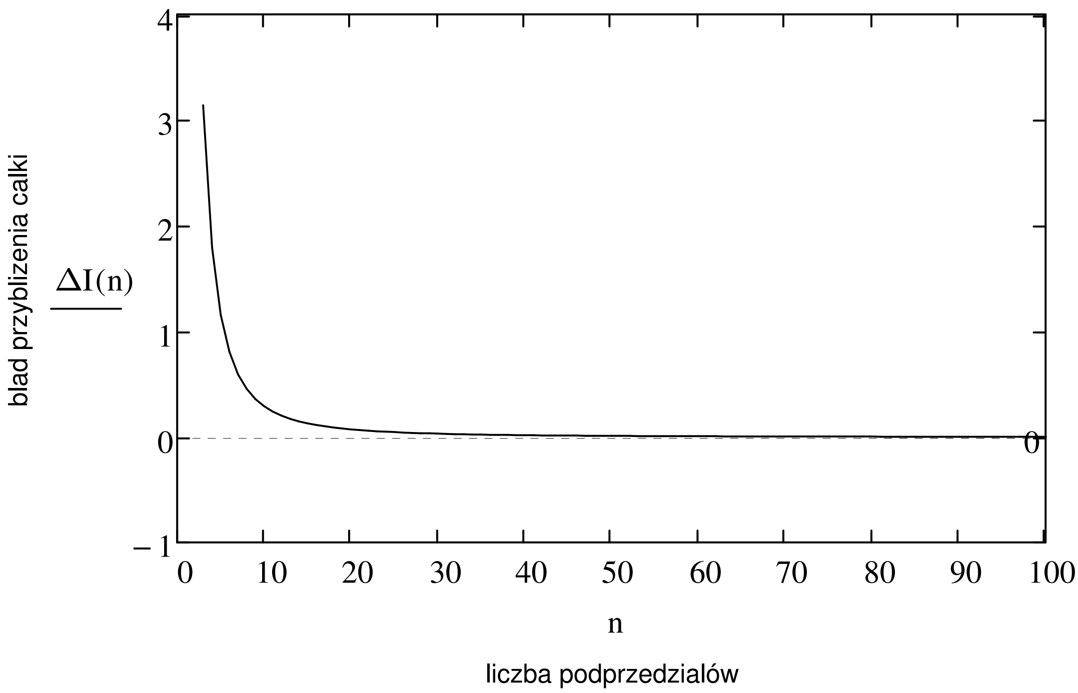
$$\begin{pmatrix} I_2 \\ h_2 \end{pmatrix} := \mathrm{trapez}(\phi, 1, 3, 8) \qquad I_2 = 29.96 \qquad h_2 = 0.25 \qquad \Delta I(I_2) = 1.548\,\%$$

$$\begin{pmatrix} I_n \\ h_n \end{pmatrix} := \mathrm{trapez}(\phi, 1, 3, 54) \qquad I_n = 29.51 \qquad h_n = 0.037 \qquad \Delta I(I_n) = 0.034\,\%$$

Ekstrapolacja Richardsona

$$I := I_2 + \frac{I_2 - I_1}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1} \qquad I = 29.51 \qquad \Delta I(I) = 0.034\,\%$$

$$\Delta I(n) := \mathrm{trapez}(\phi, 1, 3, n)_0 - I_R \qquad n := 3 \,..\, 100$$



Całkowanie numeryczne metodą Romberga (2)

Funkcja całkowana

$$\phi(x) := \frac{2\cdot x^3 + 3}{1 + \sin(x)}$$

Funkcja **trapez** obliczająca całkę z funkcji f(*x*) w przedziale *a*, *b* z podziałem przedziału całkowania na *n* części.

$$\mathrm{trapez}(f, a, b, n) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{b-a}{n} \\ s \leftarrow h\cdot\dfrac{f(a)+f(b)}{2} \\ s \leftarrow s + h\cdot\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} f(a+i\cdot h) \quad \text{if } n > 1 \\ s \end{array} \right.$$

$$\mathrm{romberg}(f, a, b, n) := \left| \begin{array}{l} I_{0,0} \leftarrow \mathrm{trapez}(f, a, b, 1) \\ I_{1,0} \leftarrow \mathrm{trapez}(f, a, b, 2) \\ \text{"ekstrapolacja Richardsona"} \\ I_{0,1} \leftarrow \dfrac{4\cdot I_{1,0} - I_{0,0}}{3} \\ \text{for } k \in 2..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} m \leftarrow 2^k \\ I_{k,0} \leftarrow \mathrm{trapez}(f, a, b, m) \\ \text{for } j \in 1..k \\ \quad \left| \begin{array}{l} c \leftarrow 4^j \\ \text{"ekstrapolacja Richardsona"} \\ I_{k-j,j} \leftarrow \dfrac{c\cdot I_{k-j+1,j-1} - I_{k-j,j-1}}{c-1} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} I_{0,n} \\ I \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

W funkcji **romberg** 2^n jest maksymalną liczbą podprzedziałów dla metody trapezów.

$$\mathrm{trapez}(\phi, 1, 3, 500) = 29.49981$$

$$\mathrm{trapez}(\phi, 1, 3, 1000) = 29.49973$$

$$\mathrm{trapez}(\phi, 1, 3, 1500) = 29.49971$$

$$\mathrm{romberg}(\phi, 1, 3, 4)_0 = 29.49970$$

$$\mathrm{romberg}(\phi, 1, 3, 4)_1 = \begin{pmatrix} 52.66615 & 30.82379 & 29.55398 & 29.50072 & 29.49970 \\ 36.28438 & 29.63334 & 29.50155 & 29.49971 & 0.00000 \\ 31.29610 & 29.50979 & 29.49974 & 0.00000 & 0.00000 \\ 29.95637 & 29.50037 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \\ 29.61437 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 \end{pmatrix}$$

$$2^4 = 16$$

Całka obliczona metodą Romberga zaimplementowaną w programie MathCad

$$I := \int_1^3 \phi(x)\, dx \qquad I = 29.49970$$