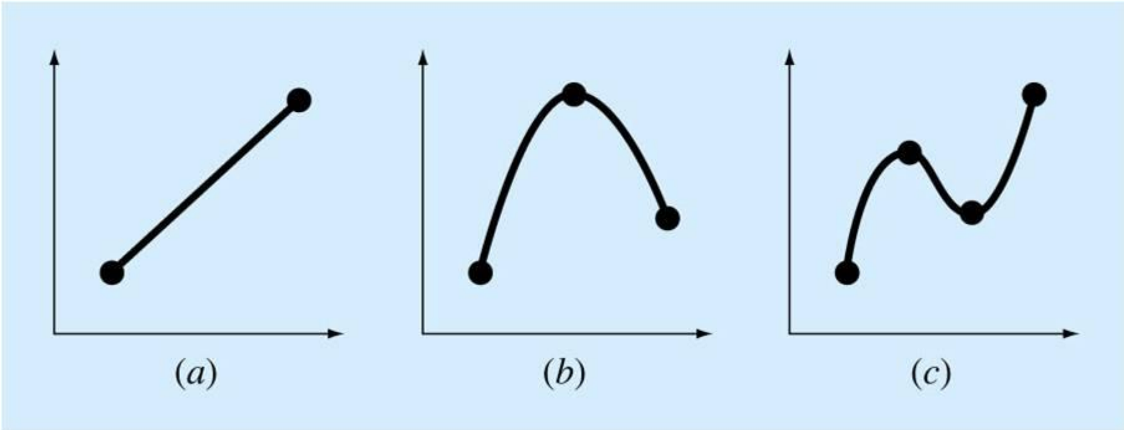
Interpolacja funkcji

1. Sformułowanie problemu:



Rys. 1. Interpolacja funkcji (a) liniowa, (b) kwadratowa, (c) kubiczna.

Dane są argumenty

$x_0, x_1, ..., x_n$ (1.1)

oraz odpowiadające im wartości funkcji

$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), ..., y_n = f(x_n)$ (1.2)

Postać funkcji $y = f(x)$ jest nie znana lub znana.

Poszukiwana jest funkcja $F(x)$ o następujących właściwościach:

$F(x) \approx f(x)$ w przedziale $x_{min} < x < x_{max}$ (1.3a)

$F(x_i) = f(x_i)$ dla $x_0, x_1, ..., x_n$ (1.3b)

gdzie:

$x_{min} = \min x_i$ (1.4a)

$x_{max} = \max x_i$ (1.4b)

Funkcję $F(x)$ nazywa się funkcją interpolującą, a dane punkty (x_i, y_i) węzłami interpolacji.

Funkcję $F(x)$ można na przykład przedstawić w postaci liniowej kombinacji założonych z góry funkcji (bazowych): $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$

$$y \cong F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + ... + a_n\varphi_n(x) \qquad (1.5)$$

2. Interpolacja wielomianem potęgowym

$$\varphi_i(x) = x^i, \quad i = 0, 1, ..., n \qquad (2.1)$$

***n* = 1** (*2 punkty*) - interpolacja liniowa

$$y = a_0 + a_1 x \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1 x_0 \\ y_1 &= a_0 + a_1 x_1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

***n* = 2** (*3 punkty*) - interpolacja kwadratowa

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 \\ y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \\ y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Interpolacja liniowa - zastosowanie do tablic

$$x_0 < x_1 < ... < x_n \tag{2.6}$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = const \tag{2.7}$$

$$x_i \le x \le x_{i+1} \tag{2.8}$$

$$y - y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \tag{2.9}$$

3. Interpolacja wielomianem Lagrange'a

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ ... \ (x - x_n) \\ \varphi_1(x) &= (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \ ... \ (x - x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_i(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ ... \ (x - x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ ... \ (x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Funkcje bazowe $\varphi_i(x_i)$ są wielomianami stopnia *n*, przy czym w funkcji $\varphi_i(x_i)$ (i = 0, 1, 2, ..., n) nie występuje czynnik $(x - x_i)$.

Wielomian interpolacyjny wyraża się tu wzorem

$$\begin{aligned} \mathrm{W}(x) &= a_0(x - x_1)(x - x_2) \ ... \ (x - x_n) + a_1(x - x_0)(x - x_2) \ ... \ (x - x_n) \\ &+ \ ... \ + a_n(x - x_0)(x - x_1) \ ... \ (x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Wyznaczenie współczynników a_i sprowadza się do rozwiązania układu równań algebraicznych liniowych

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{y} \tag{3.3}$$

gdzie:

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & (x_1-x_0)\cdots(x_1-x_n) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & (x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})\end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} \tag{3.5a}$$

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix} \tag{3.5b}$$

$$\mathbf{a}=\mathbf{X}^{-1}\cdot\mathbf{y} \tag{3.6}$$

Dzięki właściwości macierzy (3.4) dostajemy wprost wyrażenia na współczynniki a_k

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}\\ a_1 &= \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}\\ &\vdots\\ a_n &= \frac{y_n}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Po podstawieniu (3.7) do (3.2) dostajemy następującą postać wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a

$$\mathrm{W}(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \tag{3.8}$$

lub krócej

$$\mathrm{W}(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)},\quad j=0,1,\ldots,n \tag{3.9}$$

Po podstawieniu do (3.8) lub (3.9) $x = x_i$ otrzymujemy $W(x_i) = y_i$.

Przykład 1

Znaleźć wielomian interpolacyjny, który w punktach -2, 1, 2, 4 przyjmuje wartości 3, 1, -3, 8.

Dane:

$x_0 = -2,\ y_0 = 3$

$x_1 = 1,\ y_1 = 1$

$x_2 = 2,\ y_2 = -3$

$x_3 = 4,\ y_3 = 8$

Rozwiązanie:

Stosujemy wzór interpolacyjny *Lagrange'a*

$$W(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \tag{P1}$$

który dla $n = 3$ przyjmuje postać

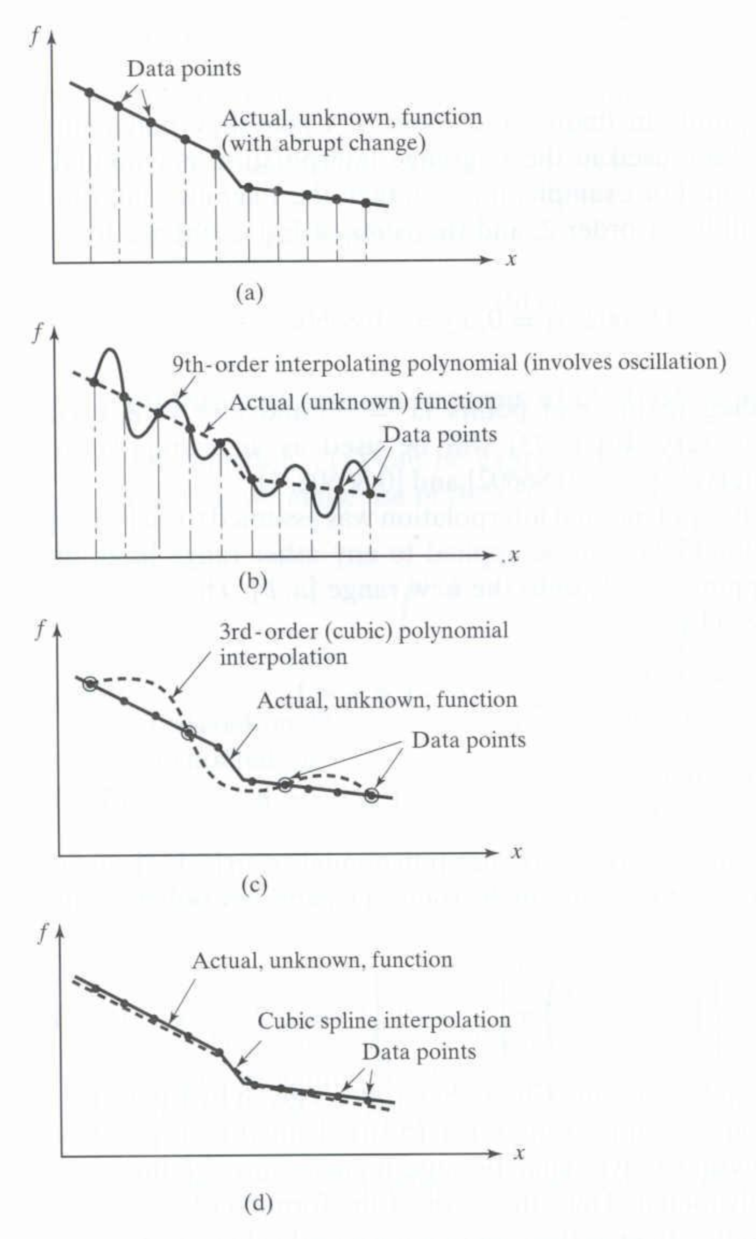
$$\begin{aligned} W(x) &= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ &+ y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \end{aligned} \tag{P2}$$

Po podstawieniu do (P2) danych liczbowych dostajemy

$$\begin{aligned} W(x) &= 3 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(-2-1)(-2-2)(-2-4)} + 1 \cdot \frac{(x+2)(x-2)(x-4)}{(1+2)(1-2)(1-4)} \\ &- 3 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-4)}{(2+2)(2-1)(2-4)} + 8 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(4+2)(4-1)(4-2)} \end{aligned} \tag{P3}$$

$$\begin{aligned} W(x) &= -\tfrac{1}{24}(x^3 - 7x^2 + 14x - 8) + \tfrac{1}{9}(x^3 - 4x^2 - 4x + 16) \\ &+ \tfrac{3}{8}(x^3 - 3x^2 - 6x + 8) + \tfrac{2}{9}(x^3 - x^2 - 4x + 4) \\ &= \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{25}{6}x + 6 \end{aligned} \tag{P4}$$

4. Interpolacja splajnami trzeciego stopnia (kubicznymi)



Rys.2. Splajny kubiczne.

Dane jest $n + 1$ punktów (węzłów interpolacji) o współrzędnych (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Poszukujemy n wielomianów trzeciego stopnia o równaniach

$$\boxed{f_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3}; \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (4.1)$$

łączących punkty (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), gdzie $i = 1, 2, ..., n$, takich aby uzyskana linia była gładka (żeby płynnie przechodziła przez wszystkie dane punkty).

Należy więc znaleźć wartości $4n$ współczynników a_i, b_i, c_i oraz d_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

W celu wykonania zadania sformułujemy następujące warunki.

1. Z ciągłości linii wynika, że

   $$f_i(x_i) = y_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{4.2}$$

   $$f_{i+1}(x_i) = y_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{4.3}$$

2. Pierwszy wielomian musi przechodzić przez punkt (x_0, y_0), natomiast ostatni wielomian musi przechodzić przez punkt (x_n, y_n), czyli

   $$f_1(x_0) = y_0 \tag{4.4}$$

   $$f_n(x_n) = y_n \tag{4.5}$$

3. Zakładamy, że w węzłach interpolacji jest

   $$f_i'(x_i) = f_{i+1}'(x_i) \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{4.6}$$

   czyli

   $$b_i + 2c_i x_i + 3d_i x_i^2 = b_{i+1} + 2c_{i+1} x_i + 3d_{i+1} x_i^2 \tag{4.7}$$

4. Przyjmujemy także, że w węzłach interpolacji zachodzi

   $$f_i''(x_i) = f_{i+1}''(x_i) \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{4.8}$$

   czyli

   $$2c_i + 6d_i x_i = 2c_{i+1} + 6d_{i+1} x_i \tag{4.9}$$

Warunek (4.1) daje nam $2n - 2$ równań, warunek (4.2) dwa równania, warunki (4.3) oraz (4.4) po $n - 1$ równań. W sumie dysponujemy $4n - 2$ równaniami. Do wyznaczenia wszystkich poszukiwanych współczynników brakuje nam dwóch równań. Równania te można sformułować następująco.

a) Zakładamy, że

   $$f_1''(x_0) = 0 \quad \text{czyli} \quad 2c_1 + 6d_1 x_0 = 0 \tag{4.10}$$

   $$f_n''(x_n) = 0 \quad \text{czyli} \quad 2c_n + 6d_n x_n = 0 \tag{4.11}$$

   Otrzymujemy w ten sposób splajny z liniowymi końcami.

b) Przyjmujemy, że

   $$f_1''(x_0) = f_1''(x_1) \quad \text{czyli} \quad 2c_1 + 6d_1 x_0 = 2c_1 + 6d_1 x_1 \tag{4.12}$$

$$f_n''(x_n) = f_n''(x_{n-1}) \text{ czyli } 2c_n + 6d_n x_n = 2c_n + 6d_n x_{n-1} \tag{4.13}$$

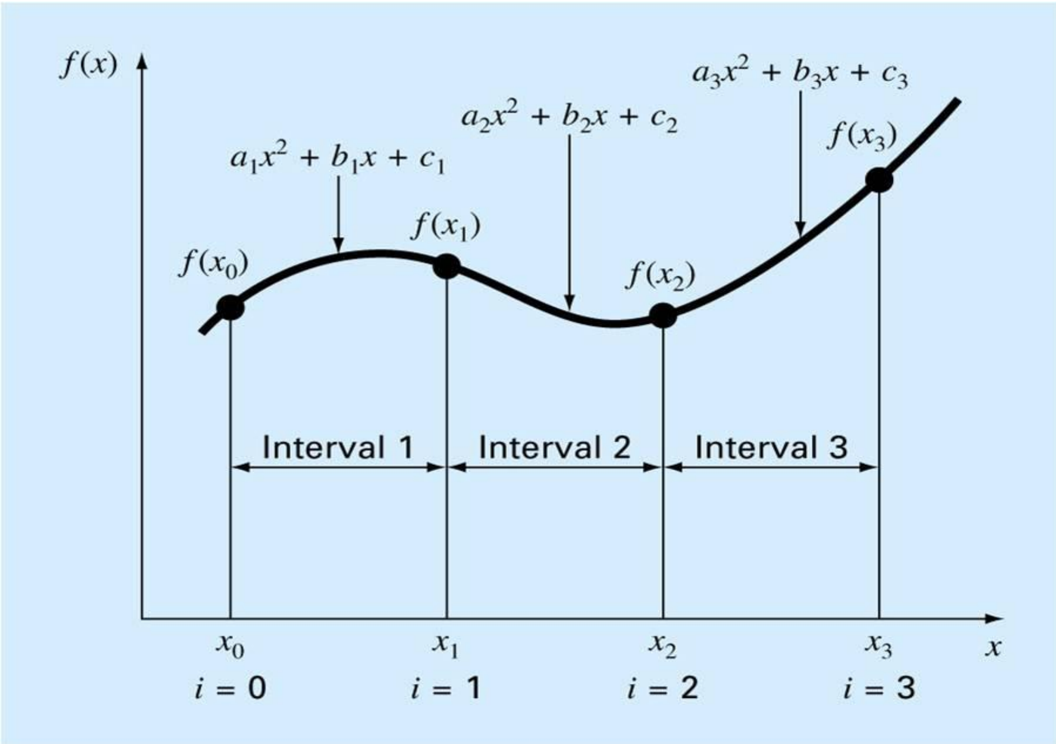
Otrzymujemy w ten sposób splajny z parabolicznymi końcami.

c) Dokonujemy liniowej ekstrapolacji drugiej pochodnej dla końców przedziału

$$\frac{f_1''(x_1) - f_1''(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f_2''(x_2) - f_2''(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{4.14}$$

$$\frac{f_n''(x_n) - f_n''(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = \frac{f_{n-1}''(x_{n-1}) - f_{n-1}''(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}} \tag{4.15}$$

Dostajemy w ten sposób splajny z końcami trzeciego stopnia.



Rys. 3. Splajny kwadratowe.

5. Interpolacja funkcji w Mathcadzie

$\mathrm{bspline}(\mathbf{vx}, \mathbf{vy}, \mathbf{u}, n)$ - oblicza wektor współczynników **vs**, wykorzystywany do wyznaczania splajnów stopnia *n* = 1 - 3 przez funkcję $\mathrm{interp}(\mathbf{vs}, \mathbf{vx}, \mathbf{vy}, x)$. Węzły splajnów określa wektor **u**; $u_0 \leq vx_0$ oraz $u_{ostatni} \geq vx_{ostatni}$; liczba elementów wektora **u** jest równa liczbie elementów wektora **vx** pomniejszonej o (n - 1). **vx** i **vy** powinny być rzeczywistymi wektorami o takiej samej liczbie współrzędnych; współrzędne **vx** należy podać w kolejności rosnącej.

$\mathrm{cspline}(\mathbf{vx}, \mathbf{vy})$ - oblicza wektor współczynników **vs**, wykorzystywany do wyznaczania splajnów stopnia trzeciego, z końcami trzeciego stopnia, przez funkcję $\mathrm{interp}(\mathbf{vs}, \mathbf{vx}, \mathbf{vy}, x)$. **vx** i **vy** powinny być rzeczywistymi wektorami o takiej samej liczbie współrzędnych; współrzędne **vx** należy podać w kolejności rosnącej.

$\mathrm{interp}(\mathbf{vs}, \mathbf{vx}, \mathbf{vy}, x)$ - wyznacza interpolowaną wartość dla argumentu równego x. Wektor **vs** jest wektorem uzyskanym z funkcji *bspline*, *cspline*, *lspline* lub *pspline* dla wektorów danych **vx** oraz **vy**. Współrzędne **vx** należy podać w kolejności rosnącej.

$\mathrm{linterp}(\mathbf{vx}, \mathbf{vy}, x)$ - wyznacza za pomocą interpolacji liniowej wartość funkcji dla argumentu równego x. **vx** i **vy** powinny być rzeczywistymi wektorami o takiej samej liczbie współrzędnych; współrzędne **vx** należy podać w kolejności rosnącej.

$\mathrm{lspline}(\mathbf{vx}, \mathbf{vy})$ - oblicza wektor współczynników **vs**, wykorzystywany do wyznaczania splajnów stopnia trzeciego, z końcami liniowymi, przez funkcję $\mathrm{interp}(\mathbf{vs}, \mathbf{vx}, \mathbf{vy}, x)$. **vx** i **vy** powinny być rzeczywistymi wektorami o takiej samej liczbie współrzędnych; współrzędne **vx** należy podać w kolejności rosnącej.

$\mathrm{pspline}(\mathbf{vx}, \mathbf{vy})$ - oblicza wektor współczynników **vs**, wykorzystywany do wyznaczania splajnów stopnia trzeciego, z końcami parabolicznymi, przez funkcję $\mathrm{interp}(\mathbf{vs}, \mathbf{vx}, \mathbf{vy}, x)$. **vx** i **vy** powinny być rzeczywistymi wektorami o takiej samej liczbie współrzędnych; współrzędne **vx** należy podać w kolejności rosnącej.