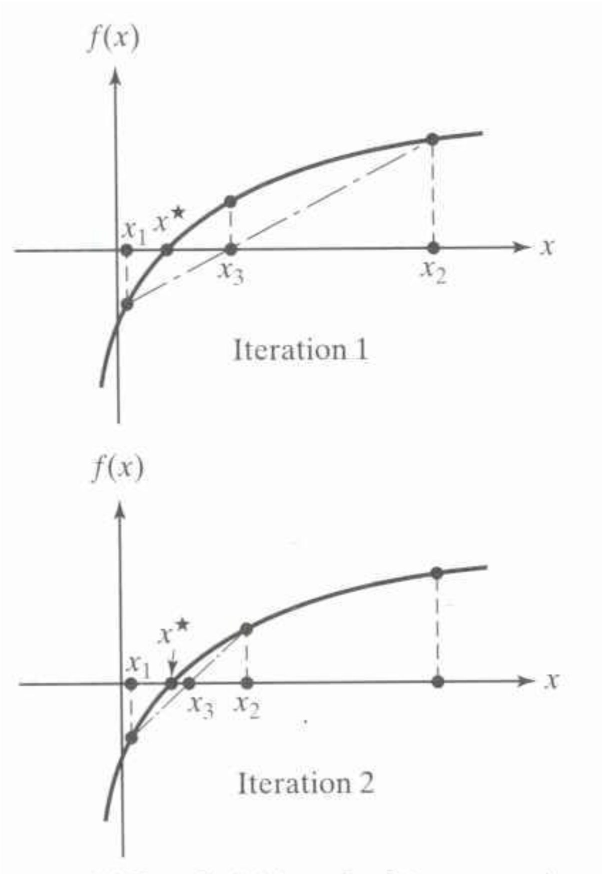
Równania algebraiczne nieliniowe

1. Metoda cięciw - regula falsi



(a) Regula falsi method (converges).

Wybieramy przedział (x_1, x_2), w którym leży pierwiastek równania $f(x) = 0$.

Wyznaczamy współczynniki p oraz q w równaniu prostej

$$y(x) = px + q$$

przechodzącej przez punkty $[x_1, f(x_1)]$ oraz $[x_2, f(x_2)]$

$$y(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1} \tag{1.1}$$

Punkt przecięcia prostej $y(x)$ z osią x, x_3, można wyznaczyć przyrównując prawą stronę (1) do zera.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} x_3 + \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1} = 0 \tag{1.2}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \tag{1.3}$$

Punkt x_3 leży bliżej poszukiwanego pierwiastka niż punkt x_1 albo punkt x_2.

Równanie (3) można uogólnić w następujący sposób

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \tag{1.4}$$

W kolejnej iteracji wartość x_{i+1} podstawiamy w miejsce x_i, gdy $f(x_{i+1})f(x_i) > 0$ lub w miejsce x_{i-1}, gdy $f(x_{i+1})f(x_{i-1}) > 0$.

Kryterium zbieżności

$$|f(x_i)| \le \varepsilon \tag{1.5}$$

lub

$$|x_i - x_{i-1}| \le \varepsilon \tag{1.6}$$

ε jest małą liczbą, rzędu 10^{-3} do 10^{-6}.

<u>Przykład 1</u>

Rozwiązać równanie

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 = 0 \tag{P1}$$

Wykonać dwie pierwsze iteracje.

<u>ROZWIĄZANIE</u>

Wybieramy przedział (x_0, x_1), w którym leży pierwiastek równania $f(x) = 0$.

Założymy wstępnie, że $x_0 = 0$ oraz $x_1 = 1$. Pierwiastek równania (P1) leży w przedziale (x_0, x_1), gdy spełniony jest warunek

$$f(x_0)f(x_1) < 0 \tag{P2}$$

Spełnienie warunku (P2) oznacza, że funkcja $f(x)$ przecina oś x w przedziale (x_0, x_1). Sprawdzamy

$$f(x_0) = x_0^2 - 3x_0 + 1 = 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$$

$f(x_1) = x_1^2 - 3x_1 + 1 = 1^2 - 3\cdot 1 + 1 = -1$

$f(x_0)\,f(x_1) = 1\cdot(-1) = -1 < 0$ - warunek (P2) jest spełniony

Wyznaczamy przybliżenie pierwiastka ze wzoru

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \tag{P3}$$

W rozważanym przypadku $i = 1,\ i - 1 = 0$ oraz $i + 1 = 2$. Stąd

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \tag{P4}$$

$f(x_0)$ oraz $f(x_1)$ obliczyliśmy wcześniej. Podstawiamy wartości do wzoru (P4)

$$x_2 = 1 - \frac{(-1)(1-0)}{-1-1} = 0{,}5$$

Obliczamy teraz wartość funkcji $f(x)$ w punkcie x_2

$$f(x_2) = x_2^2 - 3x_2 + 1 = 0{,}5^2 - 3\cdot 0{,}5 + 1 = -0{,}25$$

Ponieważ $f(x_2) < 0$ do dalszych obliczeń bierzemy punkty x_2 oraz x_0 bowiem $f(x_1)\,f(x_2) > 0$ czyli $f(x_0)\,f(x_2) < 0$.

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_0)}{f(x_2) - f(x_0)} = 0{,}5 - \frac{-0{,}25(0{,}5-0)}{-0{,}25-1} = 0{,}4$$

Ponieważ $f(x_3) = -0{,}04 < 0$, wartość kolejnego przybliżenia wyznaczymy biorąc punkty x_3 oraz x_0.

2. Metoda Newtona-Raphsona

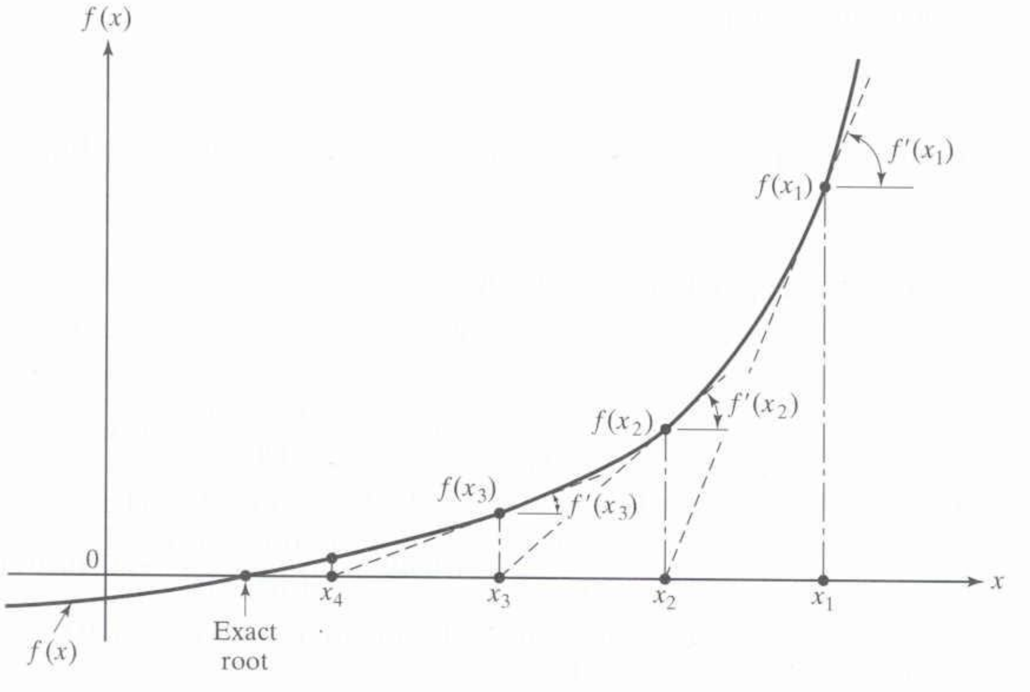


Figure 2.17 Newton's method.

Szukamy pierwiastka równania

$$f(x)=0 \tag{2.1}$$

Funkcję $f(x)$ rozwijamy w szereg *Taylora* w otoczeniu wybranego (w ogólności dowolnego) punktu x_1, który traktujemy jako pierwsze przybliżenie pierwiastka.

$$f(x)= f(x_1)+(x-x_1)f'(x_1)+\frac{1}{2!}(x-x_1)^2 f''(x_1)+\cdots \tag{2.2}$$

Uwzględnimy tylko dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia

$$f(x)\cong f(x_1)+(x-x_1)f'(x_1) \tag{2.3}$$

Równanie (2.3) jest równaniem stycznej do $f(x)$ w punkcie x_1. W celu znalezienia pierwiastka równania (2.1) prawą stronę równania (2.3) przyrównujemy do zera

$$f(x_1)+(x-x_1)f'(x_1)=0 \tag{2.4}$$

Z równania (2.4) wyznaczamy teraz drugie przybliżenie pierwiastka równania (2.1)

$$x = x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{2.5}$$

W kolejnej iteracji wartość x_2 podstawiamy w miejsce x_1 i wyznaczamy trzecie przybliżenie pierwiastka równania (2.1). Uogólnienie procedury iteracyjnej ma postać

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}; \qquad i = 1,2,\ldots \tag{2.6}$$

Kryterium zbieżności

$$|x_i - x_{i-1}| \le \varepsilon \tag{2.7}$$

$$\left|\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}\right| \le \varepsilon; \qquad x_i \ne 0 \tag{2.8}$$

lub

$$|f(x_i)| \le \varepsilon \tag{2.9}$$

ε jest małą liczbą, rzędu 10^{-3} do 10^{-6}.