Układy równań algebraicznych liniowych

1. Informacje ogólne

Układ n równań liniowych zawierający n niewiadomych to układ cramerowski albo układ zgodny.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.1}$$

Postać macierzowa układu (1.1)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1.2}$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

A - macierz główna układu

b - wektor wyrazów wolnych

x - wektor niewiadomych

W dalszej analizie założymy, że układ (1.1) jest niesprzeczny i ma jedno rozwiązanie.

2. Metoda eliminacji Gaussa

Dany jest układ równań

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \tag{2.1}$$

Od *i*-tego wiersza, dla $i = 2, 3, ..., n$, odejmujemy wiersz pierwszy pomnożony przez $a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$. Otrzymujemy

$$\begin{cases} a_{11}^{(2)}x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(2)}x_n = b_1^{(2)} \\ \qquad\quad a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\quad a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases} \tag{2.2}$$

Następnie od *i*-tego wiersza, dla $i = 3, 4, ..., n$, odejmujemy wiersz drugi pomnożony przez $a_{i2}^{(2)} / a_{22}^{(2)}$. Otrzymujemy

$$\begin{cases} a_{11}^{(3)}x_1 + a_{12}^{(3)}x_2 + a_{13}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(3)}x_n = b_1^{(3)} \\ \qquad\quad a_{22}^{(3)}x_2 + a_{23}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(3)}x_n = b_2^{(3)} \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{n3}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(3)}x_n = b_n^{(3)} \end{cases} \tag{2.3}$$

Kontynuując takie postępowanie, po wykonaniu $n - 1$ eliminacji otrzymujemy

$$\begin{cases} a_{11}^{(n)}x_1 + a_{12}^{(n)}x_2 + a_{13}^{(n)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(n)}x_n = b_1^{(n)} \\ \qquad\quad a_{22}^{(n)}x_2 + a_{23}^{(n)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(n)}x_n = b_2^{(n)} \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}^{(n)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(n)}x_n = b_3^{(n)} \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \tag{2.4}$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \tag{2.5}$$

a dla $i = n - 1, n - 2, ..., 1$

$$x_i = \frac{b_i - a_{in}x_n - \cdots - a_{ii+1}x_{i+1}}{a_{ii}} \tag{2.6}$$

Przykład 1

Rozwiązać następujący układ równań algebraicznych liniowych metodą eliminacji Gaussa

$$2x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 + x_4 = 2{,}7 \tag{P1}$$
$$0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + 4x_3 - 8{,}5x_4 = 21{,}9 \tag{P2}$$
$$0{,}3x_1 - x_2 + x_3 + 5{,}2x_4 = -3{,}9 \tag{P3}$$
$$x_1 + 0{,}2x_2 + 2{,}5x_3 - x_4 = 9{,}9 \tag{P4}$$

Równanie (P1) mnożymy przez $\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{0{,}4}{2} = 0{,}2$. Otrzymujemy

$$0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 - 0{,}02x_3 + 0{,}2x_4 = 0{,}54 \tag{P5}$$

Od równania (P2) odpowiednio stronami odejmujemy równanie (P5)

$$0{,}3x_2 + 4{,}02x_3 - 8{,}7x_4 = 21{,}36 \tag{P6}$$

Równanie (P1) mnożymy przez $\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{0{,}3}{2} = 0{,}15$. Wynik odejmujemy od równania (P3). W ten sposób dostajemy równanie

$$-1{,}15x_2 + 1{,}015x_3 + 5{,}05x_4 = -4{,}305 \tag{P7}$$

Równanie (P1) mnożymy przez $\frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Wynik odejmujemy od równania (P4) i otrzymujemy

$$-0{,}3x_2 + 2{,}55x_3 - 1{,}5x_4 = 8{,}55 \tag{P8}$$

W ten sposób z równań (P2) – (P4) wyeliminowaliśmy niewiadomą x_1. Układ (P1) – (P4) ma teraz postać

$$2x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 + x_4 = 2{,}7 \tag{P1}$$
$$0{,}3x_2 + 4{,}02x_3 - 8{,}7x_4 = 21{,}36 \tag{P6}$$

$$-1{,}15x_2 + 1{,}015x_3 + 5{,}05x_4 = -4{,}305 \qquad \text{(P7)}$$
$$-0{,}3x_2 + 2{,}55x_3 - 1{,}5x_4 = 8{,}55 \qquad \text{(P8)}$$

W analogiczny sposób z układu równań (P6) - (P8) wyeliminujemy niewiadomą x_2. Równanie (P6) mnożymy stronami przez $\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{-1{,}15}{0{,}3} = -3{,}83(3)$

$$-1{,}15x_2 - 15{,}41x_3 + 33{,}35x_4 = -81{,}88 \qquad \text{(P9)}$$

a wynik (P9) odejmujemy od równania (P7) otrzymując

$$16{,}425x_3 - 28{,}300x_4 = 77{,}575 \qquad \text{(P10)}$$

Równanie (P8) mnożymy przez $\frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{-0{,}3}{0{,}3} = -1{,}0$, a otrzymany wynik odejmujemy od równania (P8) uzyskując

$$6{,}570x_3 - 10{,}200x_4 = 29{,}910 \qquad \text{(P11)}$$

Układ (P1), (P6) – P(8) przechodzi w

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 + x_4 &= 2{,}7 && \text{(P1)}\\
0{,}3x_2 + 4{,}02x_3 - 8{,}7x_4 &= 21{,}36 && \text{(P7)}\\
16{,}425x_3 - 28{,}300x_4 &= 77{,}575 && \text{(P10)}\\
6{,}750x_3 - 10{,}200x_4 &= 29{,}910 && \text{(P11)}
\end{aligned}$$

W celu eliminacji z układu równań (P10) i (P11) niewiadomej x_3, równanie (P10) mnożymy przez $\frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = \frac{6{,}750}{16{,}425} = 0{,}410959$ a wynik odejmujemy od równania (P11)

$$1{,}11998x_4 = -1{,}11998 \qquad \text{(P12)}$$

Układ (P1), (P7), (P10), (P11) został przekształcony w

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - 0{,}1x_3 + x_4 &= 2{,}7 && \text{(P1)}\\
0{,}3x_2 + 4{,}02x_3 - 8{,}7x_4 &= 21{,}36 && \text{(P7)}\\
16{,}425x_3 - 28{,}300x_4 &= 77{,}575 && \text{(P10)}\\
1{,}11998x_4 &= -1{,}11998 && \text{(P12)}
\end{aligned}$$

Równania (P1), (P7), (P10) i (P12) tworzą układ równań odpowiadający układowi (P1) – (P4).

Z równania (P12) wyznaczamy x_4

$$x_4 = -\frac{1{,}11998}{1{,}11998} = -1{,}00000$$

Z równania (P10) wyznaczamy x_3

$$x_3 = \frac{77{,}575 + 28{,}300 \cdot x_4}{16{,}425} = \frac{77{,}575 + 28{,}300 \cdot (-1{,}00000)}{16{,}425} = 3{,}00000$$

Z równania (P7) wyznaczamy x_2

$$x_2 = \frac{21{,}36 - 4{,}02 \cdot x_3 + 8{,}7 \cdot x_4}{0{,}3} = \frac{21{,}36 - 4{,}02 \cdot 3{,}00000 + 8{,}7 \cdot (-1{,}00000)}{0{,}3}$$
$$= 2{,}00000$$

Z równania (P1) wyznaczamy x_1

$$x_1 = \frac{2{,}7 - x_2 + 0{,}1 \cdot x_3 - x_4}{2} = \frac{2{,}7 - 2{,}00000 + 0{,}1 \cdot 3{,}00000 - (-1{,}00000)}{2} = 1{,}00000$$

3. Metody iteracyjne

Dany jest układ n równań liniowych o postaci macierzowej

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (3.1)$$

Układ (1) można sprowadzić do następującego schematu iteracyjnego

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{w} \qquad (3.2)$$

gdzie $\mathbf{M}$ jest macierzą kwadratową, a $\mathbf{w}$ wektorem.

Kolejność postępowania podczas obliczeń jest następująca:

- zakładamy (w ogólności dowolne) wartości składowych wektora $\mathbf{x}^{(0)}$ (często jest to wektor zerowy),
- z równania (3.2) obliczamy wartość $\mathbf{x}^{(i+1)}$,
- w równaniu (3.2) w miejsce $\mathbf{x}^{(i)}$ wstawiamy obliczoną wartość $\mathbf{x}^{(i+1)}$,

- z równania (3.2) obliczamy kolejną wartość $\mathbf{x}^{(i+1)}$,
- itd.

Gdy schemat iteracyjny (3.2) jest zbieżny, to dla $i \to \infty$ wektor $\mathbf{x}^{(i)}$ zmierza do rozwiązania układu (3.1).

4. Metoda iteracyjna Jacobiego

Dany jest układ równań algebraicznych liniowych

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\qquad\qquad\vdots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \tag{4.1}$$

Układ (4.1) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n\right] \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n\right] \\ &\qquad\qquad\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_3 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}\right] \end{aligned} \tag{4.2}$$

Układ (4.2) można zapisać w formie

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right]; \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.3}$$

Pierwsze przybliżenie rozwiązania można przyjąć dowolnie, np. $x_i^{(1)} = 0$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Kolejne przybliżenia otrzymuje się z zależności (4.3)

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]; \quad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{4.4}$$

Proces iteracyjny przerywa się, gdy

$$\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon\,; \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.5}$$

lub

$$\left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k)}} \right| \le \varepsilon\,; \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.6}$$

gdzie ε jest odpowiednio małą liczbą. Warunkiem wystarczającym zbieżności metody Jacobiego jest

$$\left| a_{ii} \right| > \sum_{j=1,\, j \ne i}^{n} \left| a_{ij} \right|; \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.7}$$

<u>5. Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela</u>

Dany jest układ równań algebraicznych liniowych

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{5.1}$$

Układ (5.1) można przedstawić w postaci

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n \right] \tag{5.2}$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n \right] \tag{5.3}$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}} \left[b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_3 - \cdots - a_{3n}x_n \right] \tag{5.4}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}} \left[b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_3 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1} \right] \tag{5.5}$$

Pierwsze przybliżenie rozwiązania można przyjąć dowolnie, np. $x_i^{(1)} = 0$, dla $i = 2, 3, \ldots, n$. Kolejne przybliżenia otrzymuje się z układu (5.2)-(5.5). Z równania (5.2) wyznacza się $x_1^{(2)}$, następnie, wykorzystując obliczoną wartość $x_1^{(2)}$, z równania (5.3) wyznacza się $x_2^{(2)}$. Dalej, wykorzystując obliczone wartości $x_1^{(2)}$ i $x_2^{(2)}$, z równania (5.4) oblicza się $x_3^{(2)}$, itd. Algorytm ten można przedstawić następująco

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right] \tag{5.6}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Proces iteracyjny przerywa się, gdy

$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \le \varepsilon; \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{5.7}$$

lub

$$\left|\frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k)}}\right| \le \varepsilon; \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{5.8}$$

gdzie ε jest odpowiednio małą liczbą. Warunkiem wystarczającym zbieżności metody *Gaussa-Seidela* jest

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{j=1,\, j\ne i}^{n} \left|a_{ij}\right|; \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{5.9}$$

<u>Przykład 2</u>

Dany jest układ równań

$$\begin{aligned} &12x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20{,}1 \\ &-3x_1 + 10x_2 - x_3 = 10{,}7 \\ &4x_1 - x_2 + 8x_3 = 0{,}7 \end{aligned} \tag{P1}$$

Układ ten ma rozwiązanie: $x_1 = 2{,}4$, $x_2 = 1{,}7$, $x_3 = -0.9$.

Z układu (P1) utworzymy schemat iteracyjny *Jacobiego*. Z pierwszego równania układu (P1) wyznaczymy niewiadomą x_1, z drugiego wyznaczymy x_2, a z trzeciego x_3

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{12}\left(3x_2 - 4x_3 + 20{,}1\right) \\ x_2 &= \frac{1}{10}\left(3x_1 + x_3 + 10{,}7\right) \\ x_3 &= \frac{1}{8}\left(-4x_1 + x_2 + 0{,}7\right) \end{aligned} \qquad \text{(P2)}$$

Założymy pierwsze przybliżenie rozwiązania, np. $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$. W ogólności niewiadomym możemy nadać dowolne wartości. Pierwsze przybliżenie rozwiązania podstawiamy teraz do prawych stron układu (P2) wyznaczając w ten sposób drugie przybliżenie rozwiązania układu (P1) $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$.

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{12}\left(3x_2^{(0)} - 4x_3^{(0)} + 20{,}1\right) = \frac{1}{12}\left(3\cdot 0 - 4\cdot 0 + 20{,}1\right) = 1{,}675 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(3x_1^{(0)} + x_3^{(0)} + 10{,}7\right) = \frac{1}{10}\left(3\cdot 0 + 0 + 10{,}7\right) = 1{,}070 \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{8}\left(-4x_1^{(0)} + x_2^{(0)} + 0{,}7\right) = \frac{1}{8}\left(-4\cdot 0 + 0 + 0{,}7\right) = 0{,}087 \end{aligned}$$

W następnym kroku drugie przybliżenie podstawiamy do prawych stron równań (P2), itd. Wyniki uzyskane w kolejnych iteracjach przedstawiono w tablicy 1.

Tablica 1

	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	1,675	1,070	0,087
2	1,913	1,581	-0,616
3	2,273	1,582	-0,672
4	2,294	1,686	-0,853
6	2,376	1,699	-0,894

8	2,394	1,700 488	-0,899 662
10	2,398 648	1,700 286	-0,900 208
12	2,399 656	1,700 113	-0,900 123
16	2, 399 975	1,700 012	-0,900 017
20	2,399 998	1,700 001	-0,900 002

W metodzie *Gaussa-Seidela* x_1 wyznaczone z pierwszego równania układu (P2) natychmiast podstawiamy do drugiego i trzeciego równania tego układu (wykorzystujemy tę wartość w tej samej iteracji). Podobnie x_2 wyznaczone z drugiego równania układu (P2) wykorzystujemy w tej samej iteracji podczas wyznaczania x_3 z trzeciego równania tego układu.

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{12}\left(3x_2^{(0)} - 4x_3^{(0)} + 20{,}1\right) = \frac{1}{12}\left(3\cdot 0 - 4\cdot 0 + 20{,}1\right) = 1{,}675$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{10}\left(3x_1^{(1)} + x_3^{(0)} + 10{,}7\right) = \frac{1}{10}\left(3\cdot 1{,}675 + 0 + 10{,}7\right) = 1{,}572$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{8}\left(-4x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + 0{,}7\right) = \frac{1}{8}\left(-4\cdot 1{,}675 + 1{,}572 + 0{,}7\right) = -0{,}553$$

Kolejne rozwiązania uzyskane metodą *Gaussa-Seidela* przedstawiono w tablicy 2.

Tablica 2

Nr iteracji	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	1,675	1,572	-0,553
2	2,253	1,690	-0,827
4	2,395	1,699 946	-0,897 718
6	2,399 870	1,700 000	-0,899 935
8	2,399 996	1,700 000	-0,899 998

Z porównania wyników zamieszczonych w tablicach 1 oraz 2 wynika, że rozwiązanie uzyskane metodą *Jacobiego* po 20 iteracjach otrzymano metodą *Gaussa-Seidela* już po 8 iteracjach. Metoda *Gaussa-Seidela* charakteryzuje się więc szybszą zbieżnością.

Przykład 3

Układ równań z przykładu 2 sprowadzimy do schematu iteracyjnego (3.2). Na podstawie równań P2 możemy zdefiniować macierz **M** oraz wektory **w** oraz **x**

$$M := \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{12} & \frac{-4}{12} \\ \frac{3}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{-4}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} \qquad w := \begin{pmatrix} \frac{20.1}{12} \\ \frac{10.7}{10} \\ \frac{0.7}{8} \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x1 := M \cdot x + w$$

$$x1 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{3} + 1.675 \\ \frac{3 \cdot x_1}{10} + \frac{x_3}{10} + 1.07 \\ \frac{x_2}{8} - \frac{x_1}{2} + 0.0875 \end{pmatrix}$$