Metoda *Thomasa* dla układów trójprzekątniowych (metoda przeganiania)

Metoda ta służy do rozwiązywania układów typu

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & . & . & . & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ . \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

Układ (1) można także przedstawić w postaci

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \tag{2a}$$

gdzie

$$a_1 = 0 \tag{2b}$$

$$c_n = 0 \tag{2c}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n \tag{2d}$$

Poszukujemy rozwiązania w postaci

$$x_i = \beta_i x_{i+1} + \gamma_i \tag{3}$$

co można także przedstawić jako

$$x_{i-1} = \beta_{i-1} x_i + \gamma_{i-1} \tag{4}$$

gdzie β_i, γ_i są nieznanymi współczynnikami.

Podstawiamy (4) do (2a) i obliczamy x_i (prawa strona (4) jest rozwiązaniem równania (2a))

$$x_i = -\frac{c_i}{a_i \beta_{i-1} + b_i} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{a_i \beta_{i-1} + b_i} \tag{5}$$

i porównujemy prawe strony równań (5) i (3) (równania (5) i (3) są tożsamościami).
Otrzymujemy

$$\beta_i = -\frac{c_i}{a_i \beta_{i-1} + b_i} \tag{6}$$

$$\gamma_i = \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{a_i \beta_{i-1} + b_i} \tag{7}$$

Z pierwszego równania układu (2a)

$$b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1 \tag{8}$$

dostajemy

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1} \tag{9}$$

Dla i = 1 dostajemy z (3)

$$x_1 = \beta_1 x_2 + \gamma_1 \tag{10}$$

Porównując (9) i (10) otrzymujemy

$$\beta_1 = -\frac{c_1}{b_1} \quad \text{(11a)} \qquad \gamma_1 = \frac{d_1}{b_1} \quad \text{(11b)}$$

Możemy teraz z równań (6) i (7) wyznaczyć współczynniki β_i oraz γ_i dla kolejnych wartości i, aż do n.

Do ostatniego równania układu (2a), czyli

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n \tag{12}$$

podstawiamy zależność (4) (dla $i = n$)

$$a_n\left(\beta_{n-1} x_n + \gamma_{n-1}\right) + b_n x_n = d_n \tag{13}$$

Z równania (13) wyznaczamy x_n

$$x_n = \frac{d_n - a_n \gamma_{n-1}}{a_n \beta_{n-1} + b_n} = \gamma_n \tag{14}$$

Algorytm *Thomasa* można przedstawić w postaci ciągu wzorów

$$\beta_1 = -\frac{c_1}{b_1} \tag{15}$$

$$\gamma_1 = \frac{d_1}{b_1} \tag{16}$$

$$\beta_i = -\frac{c_i}{a_i \beta_{i-1} + b_i} \qquad i = 2, 3, \cdots, n \tag{17}$$

$$\gamma_i = \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{a_i \beta_{i-1} + b_i} \qquad i = 2, 3, \cdots, n \tag{18}$$

$$x_n = \gamma_n \tag{19}$$

$$x_i = \beta_i x_{i+1} + \gamma_i \quad i = n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 1 \tag{20}$$

Przykład 1.8

Rozwiązać układ równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

metodą Thomasa.

Prowadzimy obliczenia według wzorów (1.36). W pierwszej kolejności znajdujemy wartości współczynników β_i oraz γ_i

$$\beta_1 = -\frac{c_1}{b_1} = -\frac{3}{1} = -3\,, \qquad \gamma_1 = \frac{d_1}{b_1} = \frac{1}{1} = 1\,,$$

$$\beta_2 = -\frac{c_2}{a_2\beta_1 + b_2} = -\frac{1}{1\cdot(-3) + 2} = 1\,, \quad \gamma_2 = \frac{d_2 - a_2\gamma_1}{a_2\beta_1 + b_2} = \frac{5 - 1\cdot 1}{1\cdot(-3) + 2} = -4\,,$$

$$\beta_3 = -\frac{c_3}{a_3\beta_2 + b_3} = -\frac{1}{1\cdot 1 + 2} = -\frac{1}{3}\,, \quad \gamma_3 = \frac{d_3 - a_3\gamma_2}{a_3\beta_2 + b_3} = \frac{3 - 1\cdot(-4)}{1\cdot 1 + 2} = \frac{7}{3}\,,$$

$$\beta_4 = -\frac{c_4}{a_4\beta_3 + b_4} = -\frac{1}{1\cdot(-1/3) + 2} = -\frac{3}{5}\,, \quad \gamma_4 = \frac{d_4 - a_4\gamma_3}{a_4\beta_3 + b_4} = \frac{2 - 1\cdot(7/3)}{1\cdot(-1/3) + 2} = -\frac{1}{5}\,,$$

$$\beta_5 = -\frac{c_5}{a_5\beta_4 + b_5} = -\frac{0}{1\cdot(-3/5) + 1} = 0\,, \quad \gamma_5 = \frac{d_5 - a_5\gamma_4}{a_5\beta_4 + b} = \frac{2 - 1\cdot(-1/5)}{1\cdot(-3/5) + 1} = \frac{11}{2}\,,$$

a następnie wyznaczamy wartości niewiadomych

$$x_5 = \gamma_5 = \frac{11}{2},$$

$$x_4 = \beta_4 x_5 + \gamma_4 = -\frac{3}{5}\cdot\frac{11}{2} - \frac{1}{5} = -\frac{7}{2},$$

$$x_3 = \beta_3 x_4 + \gamma_3 = -\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right) + \frac{7}{3} = \frac{7}{2},$$

$$x_2 = \beta_2 x_3 + \gamma_2 = 1\cdot\frac{7}{2} - 4 = -\frac{1}{2},$$

$$x_1 = \beta_1 x_2 + \gamma_1 = -3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{5}{2}.$$

Jak łatwo sprawdzić (wstawiając otrzymane rozwiązanie do układu równań), niewiadome wyznaczone są dokładnie.

Algorytm Thomasa ma duże znaczenie w praktyce inżynierskiej, ponieważ bardzo wiele zadań z dziedziny numerycznego modelowania procesów fizycznych sprowadza się do rozwiązania układów równań (często z bardzo dużą liczbą niewiadomych), których struktura jest trójprzekątniowa. Można tu wymienić dla przykładu przybliżone rozwiązanie równania dyfuzji za pomocą metody różnic skończonych i metody elementów skończonych opisane w rozdziale 7. Do najważniejszych zalet algorytmu należą jego prostota, mała złożoność obliczeniowa (szybkie uzyskanie rozwiązania) oraz możliwość ,,oszczędnego'' korzystania z pamięci operacyjnej komputera.