Pochodne cząstkowe – ilorazy różnicowe

Iloraz różnicowy centralny

$$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x} \cong \frac{u(x+\Delta x,y,z,t)-u(x-\Delta x,y,z,t)}{2\Delta x} = \frac{u_{i+1,j,k,l}-u_{i-1,j,k,l}}{2\Delta x} \tag{1}$$

Iloraz różnicowy wsteczny

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} \cong \frac{u(x,y,t)-u(x,y,t-\Delta t)}{\Delta t} = \frac{u_{i,j,k}-u_{i,j,k-1}}{\Delta t} \tag{2}$$

Iloraz różnicowy przedni

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \cong \frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t} = \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta t} \tag{3}$$

Iloraz różnicowy centralny

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \cong \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \tag{4}$$

Metoda różnic skończonych - przypadek stacjonarny, dwuwymiarowy **(równanie Laplace'a)**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

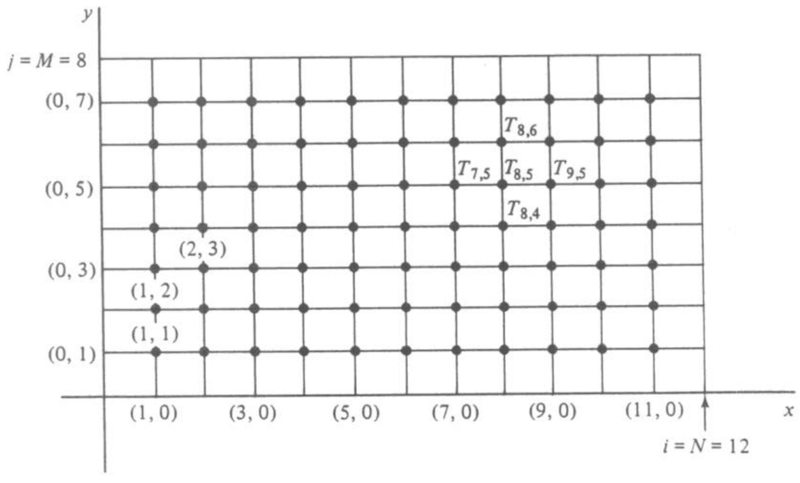


Figure 7.9. Typical mesh for the solution of Laplace's equation.

Warunki brzegowe (znane wartości T na brzegu ciała o kształcie prostokąta; W - podstawa prostokąta, H - jego wysokość)

$T(0, y) = f(y)$ (2) $T(W, y) = g(y)$ (3)

$T(x, 0) = F(x)$ (4) $T(x, H) = G(x)$ (5)

Postać różnicowa równania (1) po zastąpieniu pochodnych ilorazami różnicowymi centralnymi

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}\right) = 0 \qquad (6)$$

Postać różnicowa warunków brzegowych

$T_{0,j} = f(y_j)$ (7) $T_{N,j} = g(y_j)$ (8)

$T_{i,0} = F(x_i)$ (9) $T_{i,M} = G(x_i)$ (10)

gdzie $W = N\Delta x$ oraz $H = M\Delta y$. Założymy, że (nie jest to konieczne)

$$\Delta x = \Delta y \qquad (11)$$

Po pomnożeniu stronami przez Δx^2 dostajemy z (6)

$$T_{i-1,j} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} + T_{i,j+1} + T_{i+1,j} = 0 \qquad (12)$$

Po podstawieniu do (12)

$i = 1, 2, \dots, N-1$ (13) $j = 1, 2, \dots, M-1$ (14)

otrzymujemy do rozwiązania $(N-1)\times(M-1)$ równań algebraicznych liniowych.

Równania różniczkowe cząstkowe - równania różnicowe

Równanie różniczkowe cząstkowe dyfuzji (paraboliczne)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (1)$$

Równanie różnicowe odpowiadające równaniu (1)

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = a\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \qquad (2)$$

Po przekształceniu dostajemy z (2)

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) \tag{3}$$

Wzór (3) przedstawia schemat różnicowy jawny (explicite). Schemat ten jest stabilny dla

$$\frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} \le 0{,}5 \tag{4}$$

Dokładność metody

$$e = o\left[(\Delta x)^2\right] + o(\Delta t) \tag{5}$$

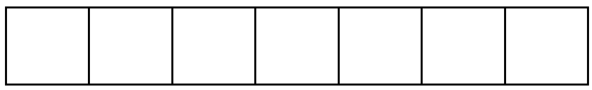
Schemat różnicowy niejawny (implicit) dla równania (1)

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = a\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{\Delta x^2} \tag{6}$$

Schemat (6) jest zawsze stabilny (bezwarunkowo). Dokładność metody

$$e = o\left[(\Delta x)^2\right] + o(\Delta t)$$

Przykład 1. Metoda jawna.



i = 0 1 2 3 4 5 6 7

Warunek początkowy

$u_{i,0} = 0$ dla i = 2 ... 6

Warunki brzegowe

$u_{1,j} = 15$
$u_{7,j} = 3$

Pozostałe dane liczbowe

$a = 2$
$\Delta x = 0{,}1$

Z warunku stabilności

$$\Delta t \le \frac{0{,}5(\Delta x)^2}{a} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}1^2}{2} = 0{,}0025$$

Stąd

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{2 \cdot 0{,}0025}{0{,}1^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

czyli

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + 0{,}5 \cdot (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$$

$$u_{1,1} = u_{1,0} = u_{1,j} = 15$$
$$u_{2,1} = u_{2,0} + 0{,}5 \cdot (u_{3,0} - 2u_{2,0} + u_{1,0}) = 0 + 0{,}5 \cdot (0 - 2 \cdot 0 + 15) = 7{,}5$$
$$u_{3,1} = u_{3,0} + 0{,}5 \cdot (u_{4,0} - 2u_{3,0} + u_{2,0}) = 0 + 0{,}5 \cdot (0 - 2 \cdot 0 + 0) = 0$$
$$u_{4,1} = u_{4,0} + 0{,}5 \cdot (u_{5,0} - 2u_{4,0} + u_{3,0}) = 0 + 0{,}5 \cdot (0 - 2 \cdot 0 + 0) = 0$$
$$u_{5,1} = u_{5,0} + 0{,}5 \cdot (u_{6,0} - 2u_{5,0} + u_{4,0}) = 0 + 0{,}5 \cdot (0 - 2 \cdot 0 + 0) = 0$$
$$u_{6,1} = u_{6,0} + 0{,}5 \cdot (u_{7,0} - 2u_{6,0} + u_{5,0}) = 0 + 0{,}5 \cdot (3 - 2 \cdot 0 + 0) = 1{,}5$$
$$u_{7,1} = u_{7,0} = u_{7,j} = 3$$

$$u_{1,2} = u_{1,0} = u_{1,j} = 15$$
$$u_{2,2} = u_{2,1} + 0{,}5 \cdot (u_{3,1} - 2u_{2,1} + u_{1,1}) = 7{,}5 + 0{,}5 \cdot (0 - 2 \cdot 7{,}5 + 15) = 7{,}5$$
$$u_{3,2} = u_{3,1} + 0{,}5 \cdot (u_{4,1} - 2u_{3,1} + u_{2,1}) = 0 + 0{,}5 \cdot (0 - 2 \cdot 0 + 7{,}5) = 3{,}75$$
$$u_{4,2} = u_{4,1} + 0{,}5 \cdot (u_{5,1} - 2u_{4,1} + u_{3,1}) = 0 + 0{,}5 \cdot (0 - 2 \cdot 0 + 0) = 0$$
$$u_{5,2} = u_{5,1} + 0{,}5 \cdot (u_{6,1} - 2u_{5,1} + u_{4,1}) = 0 + 0{,}5 \cdot (1{,}5 - 2 \cdot 0 + 0) = 0{,}75$$
$$u_{6,2} = u_{6,1} + 0{,}5 \cdot (u_{7,1} - 2u_{6,1} + u_{5,1}) = 1{,}5 + 0{,}5 \cdot (3 - 2 \cdot 1{,}5 + 0) = 1{,}5$$
$$u_{7,2} = u_{7,0} = u_{7,j} = 3$$

$u_{1,3} = u_{1,0} = u_{1,j} = 15$

$u_{2,3} = u_{2,2} + 0{,}5 \cdot (u_{3,2} - 2u_{2,2} + u_{1,2}) = 7{,}5 + 0{,}5 \cdot (3{,}75 - 2 \cdot 7{,}5 + 15) = 9{,}375$

$u_{3,3} = u_{3,2} + 0{,}5 \cdot (u_{4,2} - 2u_{3,2} + u_{2,2}) = 3{,}75 + 0{,}5 \cdot (0 - 2 \cdot 3{,}75 + 7{,}5) = 3{,}75$

$u_{4,3} = u_{4,2} + 0{,}5 \cdot (u_{5,2} - 2u_{4,2} + u_{3,2}) = 0 + 0{,}5 \cdot (0{,}75 - 2 \cdot 0 + 3{,}75) = 2{,}25$

$u_{5,3} = u_{5,2} + 0{,}5 \cdot (u_{6,2} - 2u_{5,2} + u_{4,2}) = 0{,}75 + 0{,}5 \cdot (1{,}5 - 2 \cdot 0{,}75 + 0) = 0{,}75$

$u_{6,3} = u_{6,2} + 0{,}5 \cdot (u_{7,2} - 2u_{6,2} + u_{5,2}) = 1{,}5 + 0{,}5 \cdot (3 - 2 \cdot 1{,}5 + 0{,}75) = 1{,}785$

$u_{7,3} = u_{7,0} = u_{7,j} = 3$

Metoda jawna - wykres do przykładu

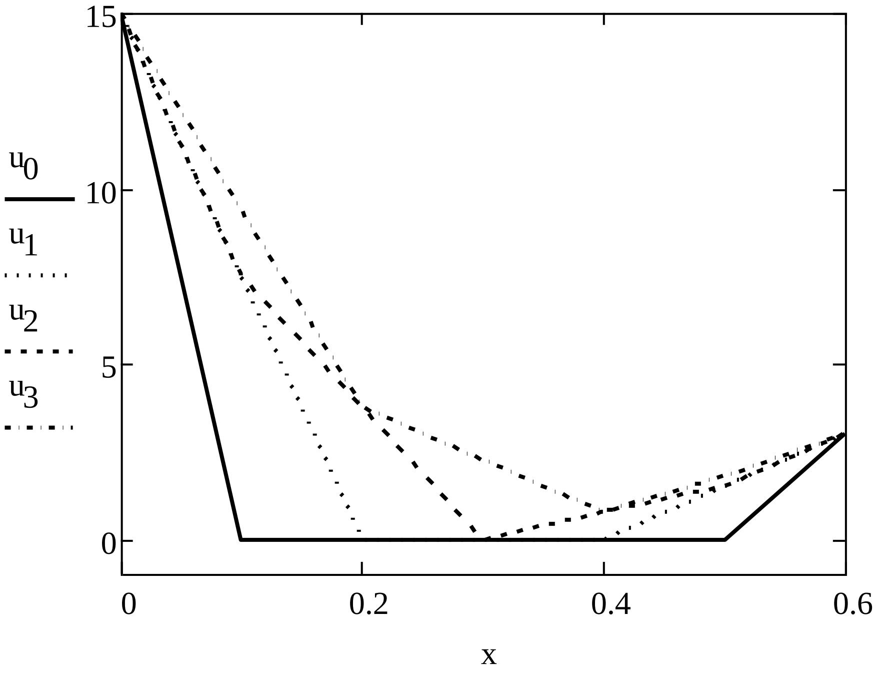
$x := (0 \;\; 0.1 \;\; 0.2 \;\; 0.3 \;\; 0.4 \;\; 0.5 \;\; 0.6)^T$

$u_0 := (15 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 3)^T$

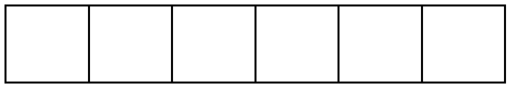
$u_1 := (15 \;\; 7.5 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1.5 \;\; 3)^T$

$u_2 := (15 \;\; 7.5 \;\; 3.75 \;\; 0 \;\; 0.75 \;\; 1.5 \;\; 3)^T$

$u_3 := (15 \;\; 9.375 \;\; 3.75 \;\; 2.25 \;\; 0.75 \;\; 1.785 \;\; 3)^T$



Przykład 2. Metoda niejawna.



$i\ =\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

Warunek początkowy

$u_{i,0} = 0$ dla $i = 1, 2 \ldots 5$

Warunki brzegowe

$u_{0,j} = 15$
$u_{6,j} = 3$ dla $j = 1, 2, \ldots$

Pozostałe dane liczbowe

$a = 2$
$\Delta x = 0{,}1$

Metoda jest stabilna dla dowolnego kroku. Przyjmujemy

$\Delta t = 0{,}1$

Stąd

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \frac{2 \cdot 0{,}1}{0{,}1^2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1})$$

czyli

$$20u_{i-1,j+1} - 41u_{i,j+1} + 20u_{i+1,j+1} = -u_{i,j}$$

$$-41u_{1,1} + 20u_{2,1} = -u_{1,0} - 20u_{0,1}$$
$$20u_{1,1} - 41u_{2,1} + 20u_{3,1} = -u_{2,0}$$
$$20u_{2,1} - 41u_{3,1} + 20u_{4,1} = -u_{3,0}$$
$$20u_{3,1} - 41u_{4,1} + 20u_{5,1} = -u_{4,0}$$
$$20u_{4,1} - 41u_{5,1} = -u_{5,0} - 20u_{6,1}$$

Niewiadome:

$u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}, u_{4,1}, u_{5,1}$

$$-41u_{1,2} + 20u_{2,2} = -u_{1,1} - 20u_{0,2}$$
$$20u_{1,2} - 41u_{2,2} + 20u_{3,2} = -u_{2,1}$$
$$20u_{2,2} - 41u_{3,2} + 20u_{4,2} = -u_{3,1}$$
$$20u_{3,2} - 41u_{4,2} + 20u_{5,2} = -u_{4,1}$$
$$20u_{4,2} - 41u_{5,2} = -u_{5,1} - 20u_{6,2}$$

Niewiadome:

$u_{1,2}, u_{2,2}, u_{3,2}, u_{4,2}, u_{5,2}$