Optymalizacja średnic słupa stalowego

Słup stalowy wykonany ze stali St3 o długości $L_s := 2 \cdot m$ i przekroju kołowym jest ściskany siłą osiową $P := 65 \cdot kN$. Jeden koniec słupa jest zamocowany a drugi swobodny. Obliczyć średnicę zewnętrzną D i wewnętrzną d rury, przy których ciężar słupa będzie minimalny. Grubość ścianki rury nie powinna być mniejsza niż 2 mm.

<u>Dane materiałowe:</u>

Ciężar właściwy materiału słupa

$$\gamma := 7.7205 \cdot 10^4 \cdot \frac{N}{m^3}$$

Moduł Younga materiału słupa

$$E := 2.1 \cdot 10^7 \frac{N}{cm^2}$$

Współczynnik Poissona (stosunek odkształcenia poprzecznego do odkształcenia wzdłużnego) dla materiału słupa

$$\nu := 0.3$$

Ciężar słupa

$$G(D,d) = V(D,d) \cdot \gamma = A(D,d) \cdot L_s \cdot \gamma$$

gdzie pole przekroju poprzecznego ścianki rury słupa

$$A(D,d) := \frac{\pi}{4} \cdot \left(D^2 - d^2\right)$$

Przy stałej długości i niezmiennym materiale słupa, jego ciężar jest proporcjonaln do A.

Optymalne średnice rury (D oraz d) zostaną określone z uwzględnieniem warunku wytrzymałości na ściskanie, warunku stateczności ogólnej słupa (prostoliniowość słupa) i warunku stateczności lokalnej (miejscowe odkształcenie ścianki, utrata przekroju kołowego).

Naprężenie w słupie musi być nie większe niż naprężenie dopuszczalne na ściskanie

$$\frac{P}{A(D,d)} \le k_c$$

$$k_c := 14 \cdot \frac{kN}{cm^2}$$

Pominięto obciążenie słupa ciężarem własnym, gdyż P>>G

Stateczność prostoliniowa (ogólna) pręta

$$n \cdot P \le P_{kr}$$

gdzie n jest współczynnikiem zwiększenia obciążenia. Przyjmiemy

$$n := 1.5$$

Siła krytyczna

$$P_{kr}(D,d) := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I(D,d)}{\mu \cdot L_s}$$

μ - współczynnik zależny od sposobu podparcia słupa
I - moment bezwładności pola przekroju poprzecznego słupa

Dla słupa utwierdzonego jednym końcem i z drugim końcem swobodnym

$$\mu := 2$$

Moment bezwładności pola przekroju poprzecznego słupa

$$I(D,d) := \frac{\pi}{64} \cdot \left(D^4 - d^4\right)$$

Warunek stateczności lokalnej:

$$\frac{P}{A(D,d)} \cdot n' \le \sigma_{kr}$$

Naprężenie krytyczne σ_{kr} uzależnione jest od własności materiału i wymiarów rury

$$\sigma_{kr}(D,d) := \frac{3}{5} \cdot \frac{E}{\sqrt{3 \cdot \left(1 - \nu^2\right)}} \cdot \frac{2 \cdot (D - d)}{D + d}$$

n' - współczynnik pewności przyjmowany arbitralnie

$n' := 1.25$

O P T Y M A L I Z A C J A

$D := 200 \cdot mm$ $\quad$ $d := 150 \cdot mm$ $\quad$ $CTOL := 10^{-4}$

Given

$d > 0$

$D - d > 4 \cdot mm$

$$\frac{P}{A(D,d)} \le k_c$$ wytrzymałość na ściskanie

$$n \cdot P \le \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I(D,d)}{\left(\mu \cdot L_s\right)^2}$$ stateczność prostoliniowa

$$\frac{P}{A(D,d)} \cdot n' \le \frac{3}{5} \cdot \frac{E}{\sqrt{3 \cdot \left(1 - \nu^2\right)}} \cdot \frac{2 \cdot (D - d)}{D + d}$$ stateczność lokalna

$$\begin{pmatrix} D \\ d \end{pmatrix} := \mathrm{Minimize}(A, D, d) = \begin{pmatrix} 100.58 \\ 96.58 \end{pmatrix} \cdot mm$$

$$gr := \frac{D - d}{2} = 2 \cdot mm$$

$$G(D, d) := A(D, d) \cdot L_s \cdot \gamma$$

$$G(D, d) = 95.63894\,N \qquad P = 65 \cdot kN$$

Po usunięciu ograniczenia na minimalną grubość ścianki

$$D := 200 \cdot mm \qquad d := 150 \cdot mm$$

Given

$$d > 0$$

$$D - d > 4 \cdot mm$$ ograniczenie wyłączone

$$\frac{P}{A(D, d)} \le k_c$$

$$n \cdot P \le \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I(D, d)}{\left(\mu \cdot L_s\right)^2}$$

$$\frac{P}{A(D, d)} \cdot n' \le \frac{3}{5} \cdot \frac{E}{\sqrt{3 \cdot \left(1 - \nu^2\right)}} \cdot \frac{2 \cdot (D - d)}{D + d}$$

$$\begin{pmatrix} D \\ d \end{pmatrix} := \mathrm{Minimize}(A, D, d) = \begin{pmatrix} 166.54 \\ 164.75 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{mm}$$

$$gr := \frac{D - d}{2} = 0.892 \cdot \mathrm{mm}$$

$$G(D, d) := A(D, d) \cdot L_s \cdot \gamma$$

$$G(D, d) = 71.69236\,\mathrm{N}$$

Z innymi wartościami startowymi

$D := 500 \cdot \mathrm{mm}$ $\quad\quad$ $d := 400 \cdot \mathrm{mm}$

Given

$$d > 0$$

$$D - d > 4 \cdot \mathrm{mm}$$

$$\frac{P}{A(D, d)} \le k_c$$

$$n \cdot P \le \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I(D, d)}{\left(\mu \cdot L_s\right)^2}$$

$$\frac{P}{A(D, d)} \cdot n' \le \frac{3}{5} \cdot \frac{E}{\sqrt{3 \cdot \left(1 - \nu^2\right)}} \cdot \frac{2 \cdot (D - d)}{D + d}$$

$$\begin{pmatrix} D \\ d \end{pmatrix} := \text{Minimize}(A, D, d) = \begin{pmatrix} 138.18 \\ 136.02 \end{pmatrix} \cdot \text{mm}$$

$$gr := \frac{D - d}{2} = 1.078 \cdot \text{mm}$$

$$G(D, d) := A(D, d) \cdot L_s \cdot \gamma$$

$$G(D, d) = 71.69348\,\text{N}$$