Pytania z odpowiedziami – 1

1. Wykorzystując iloraz różnicowy przedni obliczyć przybliżoną wartość pochodnej funkcji $y = 2x^2 - 1$ w punkcie $x_0 = 2$.

Odp.

$$y'(x_0) = \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h}$$

Zakładamy na przykład, że $h = 0{,}1$.

$$y(x_0) = y(2) = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$$

$$y(x_0 + h) = y(2 + 0{,}1) = 2 \cdot 2{,}1^2 - 1 = 7{,}82$$

$$y'(2) = \frac{7{,}82 - 7}{0{,}1} = 8{,}2$$

2. Metoda Taylora służy do rozwiązywania równań różniczkowych typu $y' = F(x, y)$. W metodzie tej wykorzystywane są pochodne wyższych rzędów: y'', y''', itd. Jak się wyznacza te pochodne?

Odp. Pochodne wyższych rzędów wyznacza się różniczkując odpowiednią ilość razy prawą stronę równania $y' = F(x, y)$. Na przykład, druga pochodna jest równa

$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} = F\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x}$$

3. Równanie różniczkowe cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ przekształcić w równanie różnicowe stosując iloraz różnicowy centralny.

Odp.

$$\frac{z(x+h, y) - z(x-h, y)}{2h} + \frac{z(x, y+k) - z(x, y-k)}{2k} = 0$$

4. Dane jest równanie różniczkowe $y' - y + x = 0$ oraz warunek początkowy $y(0) = 1$. Wyznaczyć wartość funkcji $y(x)$ w punkcie $x_k = 0{,}2$ dzieląc przedział [0; 0,2] na $n = 2$ części. Zastosować wzór Eulera $y_{i+1} = y_i + h \cdot F(x_i, y_i)$.

Odp.

$$y' = y - x = F(x, y)$$

Obliczamy krok: $h = \frac{x_k - x_0}{n} = \frac{0{,}2 - 0}{2} = 0{,}1$.

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 1$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot F(x_0, y_0) = y_0 + h \cdot (y_0 - x_0) = 1 + 0{,}1 \cdot (1 - 0) = 1{,}1$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0{,}1 = 0{,}1$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot F(x_1, y_1) = y_1 + h \cdot (y_1 - x_1) = 1{,}1 + 0{,}1 \cdot (1{,}1 - 0{,}1) = 1{,}2$$

$$x_2 = x_1 + h = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2 = x_k$$