Rozwiązywanie równań algebraicznych

Układ równań algebraicznych liniowych zostanie rozwiązany symbolicznie za pomocą bloku Given - Find.

Given

$$x_1 + 3\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 2$$

$$x_1 + 3\cdot x_2 + 4\cdot x_3 = 1 \qquad (1)$$

$$x_1 + 4\cdot x_2 + 2\cdot x_3 = 4$$

$$\mathrm{Find}(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Indeksy przy zmiennych x_i nie są indeksami w rozumieniu składowych wektora, lecz przesunietymi oznaczeniami (.).

Zmiennym x_1, x_2 oraz x_3 nie są nadane obliczone wartości 2, 1, -1.

$x_1 :=$ ▮ Mathcad sugeruje przypisanie wartości zmiennej x_1

Aby rozwiązanie zostało przypisane zmiennym x_1, x_2, x_3 arkusz powinien być zredagowany następująco

Given

$$x_1 + 3\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 2$$

$$x_1 + 3\cdot x_2 + 4\cdot x_3 = 1$$

$$x_1 + 4\cdot x_2 + 2\cdot x_3 = 4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Teraz Mathcad przypisał warości zmiennym x_1, x_2, $x_{3.}$ Sprawdzamy

$x_1 = 2$ $\quad$ $x_2 = 1$ $\quad$ $x_3 = -1$

Rozwiązanie może być przypisane zmiennym o nazwach innych niż użyte w układzie równań, np.

Given

$$x_1 + 3\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 2$$
$$x_1 + 3\cdot x_2 + 4\cdot x_3 = 1$$
$$x_1 + 4\cdot x_2 + 2\cdot x_3 = 4$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$a = 2$ $\quad$ $b = 1$ $\quad$ $c = -1$

A także składowym wektora

Given

$$x_1 + 3\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 2$$
$$x_1 + 3\cdot x_2 + 4\cdot x_3 = 1$$
$$x_1 + 4\cdot x_2 + 2\cdot x_3 = 4$$

$$y := \mathrm{Find}(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$y_0 = 2$ $\quad y_1 = 1$ $\quad y_2 = -1$

Tu indeksy są indeksami składowych wektora ([ )

Układ (1) można też rozwiązać numerycznie

$x_1 := 0$ $\quad x_2 := 0$ $\quad x_3 := 0$

Given

$$x_1 + 3\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 2$$

$$x_1 + 3\cdot x_2 + 4\cdot x_3 = 1$$

$$x_1 + 4\cdot x_2 + 2\cdot x_3 = 4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Podczas rozwiązywania numerycznego za funkcją Find jest znak = (oblicz numerycznie), a przed słowem kluczowym Given domyślne wartości niewiadomych x_1, x_2, x_3.

Za pomocą bloku Given - Find można rozwiązywać układy równań nieliniowych, a także pojedyncze równania liniowe i nieliniowe.

<u>Przykłady</u>

Rozwiązanie symboliczne ukladu równań algebraicznych nieliniowych

Given

$$x + 3\cdot y\cdot z = 2$$

$$x + 2\cdot y + 4\cdot z = 1$$

$$x + 4\cdot y^2 + 2\cdot z = 4$$

$$w := \mathrm{Find}(x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{9\cdot\sqrt{5}}{2} - \frac{11}{2} & \frac{9\cdot\sqrt{5}}{2} - \frac{11}{2} & \frac{19}{9} \\ \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} & \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{2}{3} \\ \sqrt{5} + 1 & 1 - \sqrt{5} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

$$w \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{9\cdot\sqrt{5}}{2} - \frac{11}{2} & \frac{9\cdot\sqrt{5}}{2} - \frac{11}{2} & \frac{19}{9} \\ \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} & \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{2}{3} \\ \sqrt{5} + 1 & 1 - \sqrt{5} & \frac{1}{18} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Przez zastosowanie operatora = można przedstawić wynik (2) w postaci liczb rzeczywistych

$$w = \begin{pmatrix} -15.562 & 4.562 & 2.111 \\ 1.809 & 0.691 & -0.667 \\ 3.236 & -1.236 & 0.056 \end{pmatrix}$$

Rozwiązując układ nieliniowy symbolicznie uzyskuje się wszystkie rozwiązania.

Rozwiązanie numeryczne układu nieliniowego

$x := -5 \qquad y := 1 \qquad z := 1$

Given

$$x + 3\cdot y\cdot z = 2$$

$$x + 2\cdot y + 4\cdot z = 1$$

$$x + 4\cdot y^2 + 2\cdot z = 4$$

$$w := \mathrm{Find}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4.562 \\ 0.691 \\ -1.236 \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} 4.562 \\ 0.691 \\ -1.236 \end{pmatrix}$$

Rozwiązując układ nieliniowy numerycznie uzyskuje się tylko jedno z rozwiązań.

Inne rozwiązania można znaleźć zmieniając domyślne wartości niewiadomych, lub wprowadzając dodatkowe warunki do bloku Given - Find.

$x := 0$ $y := 0$ $z := 0$ zmienione wartości domyślne

Given

$$x + 3 \cdot y \cdot z = 2$$

$$x + 2 \cdot y + 4 \cdot z = 1$$

$$x + 4 \cdot y^2 + 2 \cdot z = 4$$

$$w := \mathrm{Find}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2.111 \\ -0.667 \\ 0.056 \end{pmatrix}$$ uzyskano inne rozwiązanie

$x := -5$ $y := 1$ $z := 1$

Given

$x \le -5$ wprowadzono dodatkowy warunek

$x + 3 \cdot y \cdot z = 2$

$x + 2 \cdot y + 4 \cdot z = 1$

$x + 4 \cdot y^2 + 2 \cdot z = 4$

$$w := \mathrm{Find}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -15.562 \\ 1.809 \\ 3.236 \end{pmatrix}$$

uzyskano trzecie rozwiązanie

Do rozwiązywania układu równan algebraicznych liniowych i nieliniowych można wykorzystać słowo kluczowe solve

$$\begin{pmatrix} p + 3 \cdot q + 3 \cdot r = 2 \\ p + 3 \cdot q + 4 \cdot r = 1 \\ p + 4 \cdot q + 2 \cdot r = 4 \end{pmatrix} \mathrm{solve}, \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \rightarrow (2 \quad 1 \quad -1) \qquad (3)$$

Znalezione wartości zmiennych p, q, r nie są dostepne w arkuszu

$p :=$ ▪ $q :=$ ▪ $r :=$ ▪

Aby przypisać zmiennym p, q, r obliczone wartości można zmodyfikować wyrażenie (3) następująco

$$(p \quad q \quad r) := \begin{pmatrix} p + 3 \cdot q + 3 \cdot r = 2 \\ p + 3 \cdot q + 4 \cdot r = 1 \\ p + 4 \cdot q + 2 \cdot r = 4 \end{pmatrix} \mathrm{solve}, \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \rightarrow (2 \quad 1 \quad -1) \qquad (4)$$

$p = 2$ $\quad q = 1$ $\quad r = -1$

Teraz niewiadomym p, q, r zostaly przypisane wyznaczone wartości.

Zamiast macierzy jednowierszowej (p q r) można po lewej stronie wyrażenia (4) wprowadzić nazwę macierzy, np. Q.

Ponieważ zmienne p, q, r posiadają wartości numeryczne, przed użyciem ich w obliczeniach symbolicznych należy dokonać ich redefinicji

$p := p$ $\quad q := q$ $\quad r := r$ redefinicja zmiennych

$$Q := \begin{pmatrix} p + 3\cdot q + 3\cdot r = 2 \\ p + 3\cdot q + 4\cdot r = 1 \\ p + 4\cdot q + 2\cdot r = 4 \end{pmatrix} \text{solve}, \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$Q_{0,0} = 2$ $\quad Q_{0,1} = 1$ $\quad Q_{0,2} = -1$

Równania algebraiczne liniowe można rozwiązywać wykorzystując macierz odwrotną macierzy głównej układu, A.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad y := A^{-1}\cdot b \qquad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$ sprawdzenie

lub funkcję lsolve

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} := \mathrm{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$z_0 = 2$ $z_1 = 1$ $z_2 = -1$

$$d := \mathrm{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$d_0 = 2$ $d_1 = 1$ $d_2 = -1$