PODSTAWY WYMIANY CIEPŁA

1. Podstawowe pojęcia w wymianie ciepła

Sposoby transportu ciepła:

- przewodzenie
- konwekcja
  - swobodna
  - wymuszona
- promieniowanie

Transport ciepła w ciałach stałych odbywa się na drodze przewodzenia. Z przewodzeniem ciepła mamy do czynienia, gdy makroskopowe części ośrodka nie przemieszczają się względem siebie. Podstawowym sposobem transportu ciepła w płynach (cieczach i gazach) jest konwekcja. W przypadku konwekcji płyn przemieszcza się i miesza. W płynach ciepło może być też przewodzone. Gdy ruch płynu spowodowany jest różnicą temperatur w płynie, mamy do czynienia z konwekcją swobodną. W przypadku konwekcji wymuszonej przemieszczanie płynu wywołane jest przez pompę lub sprężarkę. Promieniowanie ciepła polega na transporcie energii w postaci promieniowania elektromagnetycznego o określonej długości fal.

Pole temperatury

- niestacjonarne (temperatura zależy od położenia elementu ciała oraz czasu)

$$T = f(x, y, z, t) \qquad (1.1)$$

- stacjonarne (temperatura w danym punkcie ciała nie zależy od czasu)

$$T = f(x, y, z) \qquad (1.2a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \qquad (1.2b)$$

Zagadnienie wymiany ciepła może być:

- jednowymiarowe (temperatura zmienia się tylko względem jednej współrzędnej),
- dwuwymiarowe (temperatura zmienia się tylko względem dwóch współrzędnych),
- trójwymiarowe (temperatura zmienia się względem wszystkich współrzędnych).

2. Przewodzenie ciepła

2.1. Prawo Fouriera

Prawo Fouriera wiąże gęstość strumienia przewodzonego ciepła w określonym punkcie ciała z gradientem temperatury w tym punkcie

$$\mathbf{q} = -\lambda \,\mathrm{grad}\, T = -\lambda \nabla T \quad \left[\frac{W}{m^2}\right] \tag{2.1}$$

gdzie $\lambda \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot K}}\right]$ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła (przewodnością cieplną), którego wartość zależy od rodzaju ciała, a także od temperatury. Dla kartezjańskiego układu współrzędnych prostokątnych

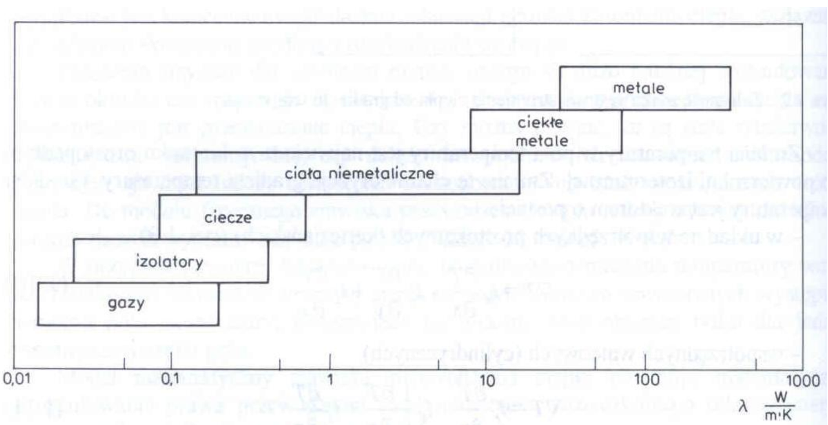
$$\mathrm{grad}\, T \equiv \nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k} \tag{2.2}$$

W prostokątnym układzie współrzędnych wektor **q** ma trzy składowe

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \tag{2.3a}$$

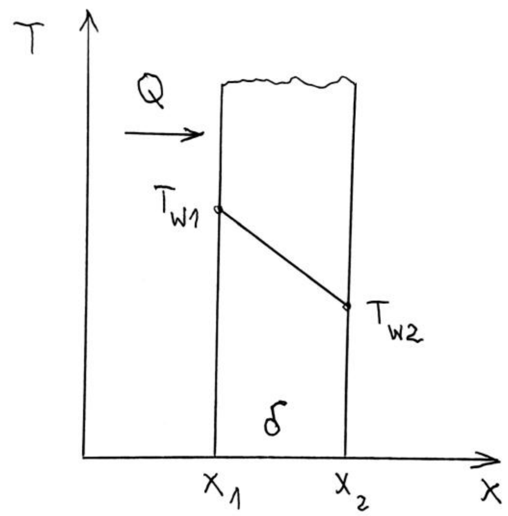
$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.3b}$$

$$q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \tag{2.3c}$$



Rys. 2-1. Zakresy wartości współczynników przewodzenia ciepła.

2.2. Stacjonarne przewodzenie ciepła przez ściankę płaską przy $\lambda = const$



Równanie różniczkowe opisujące ten przypadek przewodzenia (prawo Fouriera)

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} \tag{2.4}$$

Równanie (2.4) rozwiązujemy metodą rozdzielenia zmiennych

$$q dx = -\lambda dT \tag{2.5}$$

Dla przypadku stacjonarnego przez ściankę płaską gęstość strumienia ciepła q jest stała. Równanie (2.5) całkujemy stronami

$$\int_{x_1}^{x_2} q dx = -\int_{T_{w1}}^{T_{w2}} \lambda dT \tag{2.6}$$

$$q(x_2 - x_1) = -\lambda (T_{w2} - T_{w1}) \tag{2.7}$$

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(T_{w1} - T_{w2}) \tag{2.8}$$

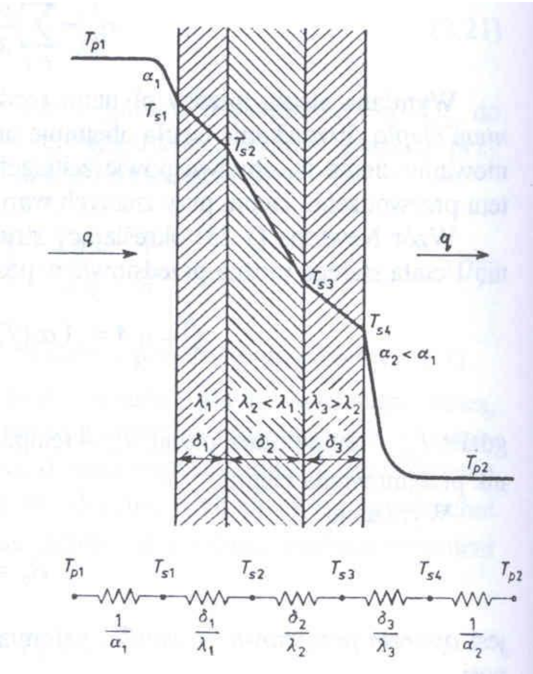
gdzie $\delta = x_2 - x_1$ jest grubością ścianki przewodzącej ciepło.

Dla ścianki o powierzchni A

$$Q = Aq = \frac{A\lambda}{\delta}(T_{w1} - T_{w2}) \tag{2.9}$$

$$\lambda = \frac{Q\delta}{A(T_{w1} - T_{w2})} \tag{2.10}$$

2.2. Stacjonarne przewodzenie ciepła przez ściankę płaską wielowarstwową



Rys. 2.3. Przenikanie ciepła przez ściankę płaską wielowarstwową

Do obliczenia strumienia ciepła przewodzonego przez ściankę wielowarstwową można użyć wzoru (2.9) pod warunkiem, że współczynnik przewodzenia ciepła zostanie zastąpiony tzw. zastępczym współczynnikiem przewodzenia ciepła

$$\lambda_z = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}} \tag{2.11}$$

gdzie:

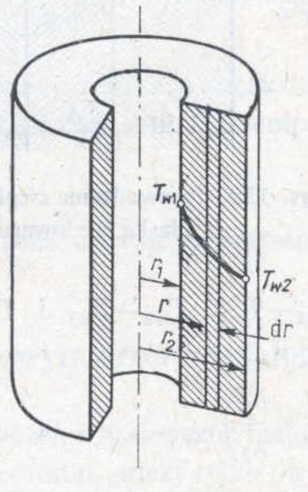
i – numer warstwy

n – liczba warstw

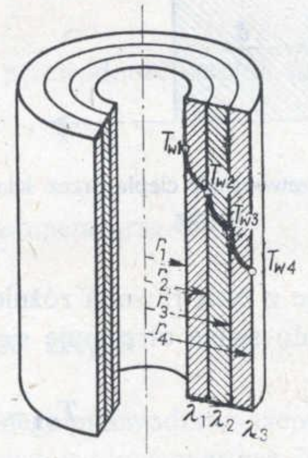
δ_i – grubość warstwy o numerze i

λ_i – współczynnik przewodzenia ciepła dla warstwy o numerze i

2.3. Stacjonarne przewodzenie przez ściankę cylindryczną przy $\lambda = const$



Rys. 13.6. Przewodzenie ciepła przez ściankę walcową



Rys. 13.7. Przewodzenie ciepła przez ściankę walcową wielowarstwową

$$q = -\lambda \frac{dT}{dr} \quad \left[W / m^2\right] \qquad (2.12)$$

gdzie w przypadku ścianki cylindrycznej q zależy od promienia r

$$q = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2\pi r l} \qquad (2.13)$$

natomiast $Q = const$.

Podstawiamy prawą stronę równania (2.13) zamiast q w równaniu (2.12)

$$Q = -2\pi r l \lambda \frac{dT}{dr} \quad [W] \qquad (2.14)$$

W równaniu (2.14) rozdzielamy zmienne i całkujemy równanie stronami

$$Q \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -2\pi l \lambda \int_{T_{w1}}^{T_{w2}} dT \qquad (2.15)$$

$$Q \ln \frac{r_2}{r_1} = -2\pi l \lambda \left(T_{w2} - T_{w1}\right) \qquad (2.16)$$

$$Q = \frac{2\pi l \lambda}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \left(T_{w1} - T_{w2}\right) = \frac{2\pi l \lambda}{\ln \frac{d_2}{d_1}} \left(T_{w1} - T_{w2}\right) \qquad (2.17)$$

Strumień ciepła odniesiony do jednostki długości rury

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{2\pi\lambda}{\ln\frac{d_2}{d_1}}\left(T_{w1} - T_{w2}\right) \quad [W/m] \tag{2.18}$$

Dla ścianki wielowarstwowej

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{2\pi\lambda_z}{\ln\frac{d_{n+1}}{d_1}}\left(T_1 - T_{n+1}\right) \tag{2.19}$$

gdzie:

$$\lambda_z = \frac{\ln\frac{d_{n+1}}{d_1}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}} \tag{2.20}$$

i – numer warstwy

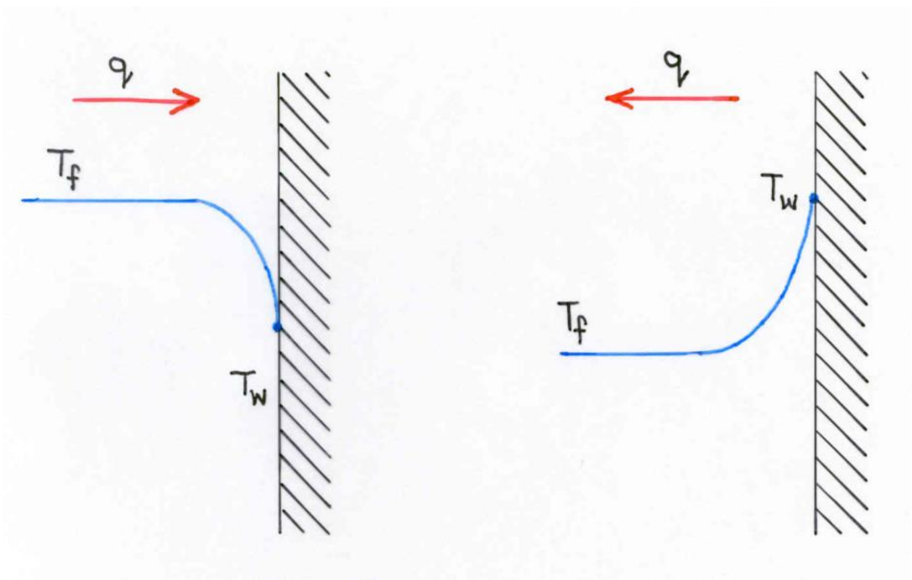
n – liczba warstw

d_i – średnica warstwy o numerze *i* (pierwsza warstwa, o najmniejszej średnicy, ma nr 1)

λ_i – współczynnik przewodzenia ciepła dla warstwy o numerze *i*

3. Wnikanie (przejmowanie) ciepła

Wnikaniem ciepła nazywamy wymianę ciepła pomiędzy ścianką i omywającym ją płynem. Ciepło w płynie jest transportowane na drodze konwekcji i przewodzenia.



Równanie Newtona

$$Q = A\alpha\left(T_w - T_f\right) \qquad (3.1)$$

$\alpha\left[\dfrac{W}{m^2 K}\right]$ – współczynnik wnikania (przejmowania) ciepła

<u>α zależy od:</u>

- prędkości płynu: *w*,
- od kształtu, wielkości, rodzaju i temperatury powierzchni wymiany ciepła: φ, l_1, l_2, ..., T_w,
- od parametrów termofizycznych płynu: T_f, *p*, ρ, *c*, λ, υ.

$$\alpha = f\left(w, T_f, T_w, p, \rho, c, \lambda, \upsilon, \varphi, l_1, l_2, \ldots\right) \qquad (3.2)$$

<u>Przykład</u>

Dla wymuszonego przepływu burzliwego cieczy lub gazu w kanale na drodze doświadczalnej określono zależność

$$\mathrm{Nu} = C\,\mathrm{Re}^m\,\mathrm{Pr}^n \qquad (3.3)$$

gdzie typowe wartości *m* oraz *n* wynoszą: $m = 0{,}8; \quad n = 0{,}4$.

Liczba *Nusselta* (bezwymiarowa)

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha\, d_h}{\lambda} \qquad (3.4)$$

Liczba *Reynoldsa* (bezwymiarowa)

$$\mathrm{Re} = \frac{w d_h}{\upsilon} \qquad (3.5)$$

gdzie $\upsilon\left[m^2 / s\right]$ jest współczynnikiem lepkości kinematycznej.

Liczba *Prandtla* (bezwymiarowa)

$$\mathrm{Pr} = \frac{\upsilon}{a} \qquad (3.6)$$

Z równania (3.4) wyznacza się współczynnik wnikania ciepła

$$\alpha = \frac{\lambda\,\mathrm{Nu}}{d_h} \qquad [\mathrm{W/(m^2 \cdot K]} \qquad (3.7)$$

Współczynnik wyrównania temperatury *a* jest definiowany następująco

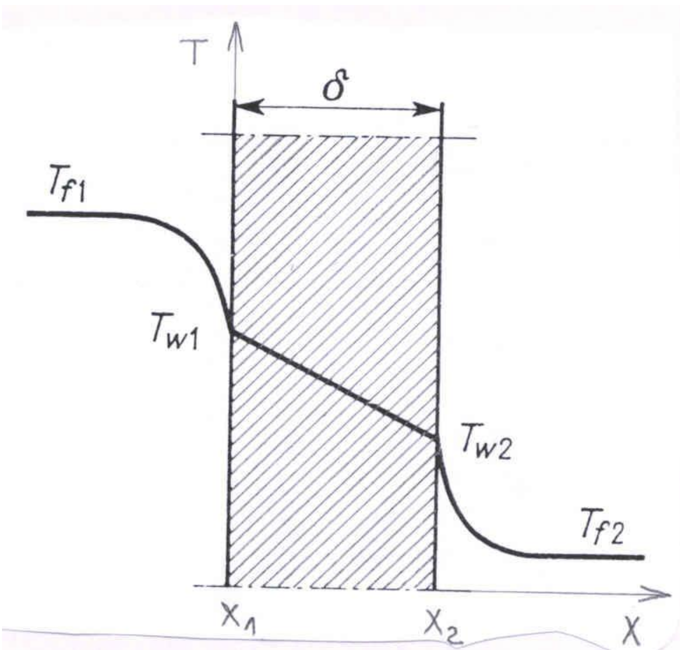
$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad \left[m^2 / s\right] \tag{3.8}$$

Zakresy wartości współczynników przejmowania ciepła w $\frac{W}{m^2 \cdot K}$

Rodzaj płynu	Konwekcja swobodna	Konwekcja wymuszona
Gaz	5 – 30	30 – 500
Woda	30 – 300	$300 - 2 \cdot 10^4$
Olej	5 – 100	30 – 3000
Ciekłe metale	50 – 500	$500 - 2 \cdot 10^4$
Wrząca woda	$2 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^3 - 10^5$
Kondensacja pary wodnej	$3 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^5$

4. Przenikanie ciepła

Przenikaniem ciepła nazywamy transport ciepła od płynu o wyższej temperaturze do płynu o niższej temperaturze przez przegrodę.



$$q = k\left(T_{f1} - T_{f2}\right) \quad \left[\mathrm{W/m^2}\right] \tag{4.1}$$

gdzie $k\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K}}\right]$ jest współczynnikiem przenikania ciepła

Dla ścianki o powierzchni *A*

$$Q = Aq \tag{4.2}$$

4.1. Przenikanie ciepła przez ściankę płaską o grubości δ

Wnikanie ciepła do ścianki

$$q = \alpha_1 \left(T_{f1} - T_{w1} \right) \qquad (4.3)$$

Przewodzenie ciepła przez ściankę

$$q = \frac{\lambda}{\delta} \left(T_{w1} - T_{w2} \right) \qquad (4.4)$$

Przejmowanie ciepła przez płyn

$$q = \alpha_2 \left(T_{w2} - T_{f2} \right) \qquad (4.5)$$

Z (4.3)

$$T_{f1} - T_{w1} = \frac{q}{\alpha_1} \qquad (4.6)$$

Z (4.4)

$$T_{w1} - T_{w2} = \frac{q\delta}{\lambda} \qquad (4.7)$$

Z (4.5)

$$T_{w2} - T_{f2} = \frac{q}{\alpha_2} \qquad (4.8)$$

Równania (4.6)-(4.8) sumujemy stronami

$$T_{f1} - T_{f2} = q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \qquad (4.9)$$

$$q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \left(T_{f1} - T_{f2} \right) \qquad (4.10)$$

Z porównania (4.10) z (4.1) otrzymujemy

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \qquad (4.11)$$

4.2. Przenikanie ciepła przez ściankę cylindryczną

$$Q = \frac{\pi l \left(T_{f1} - T_{f2}\right)}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}} \tag{4.12}$$

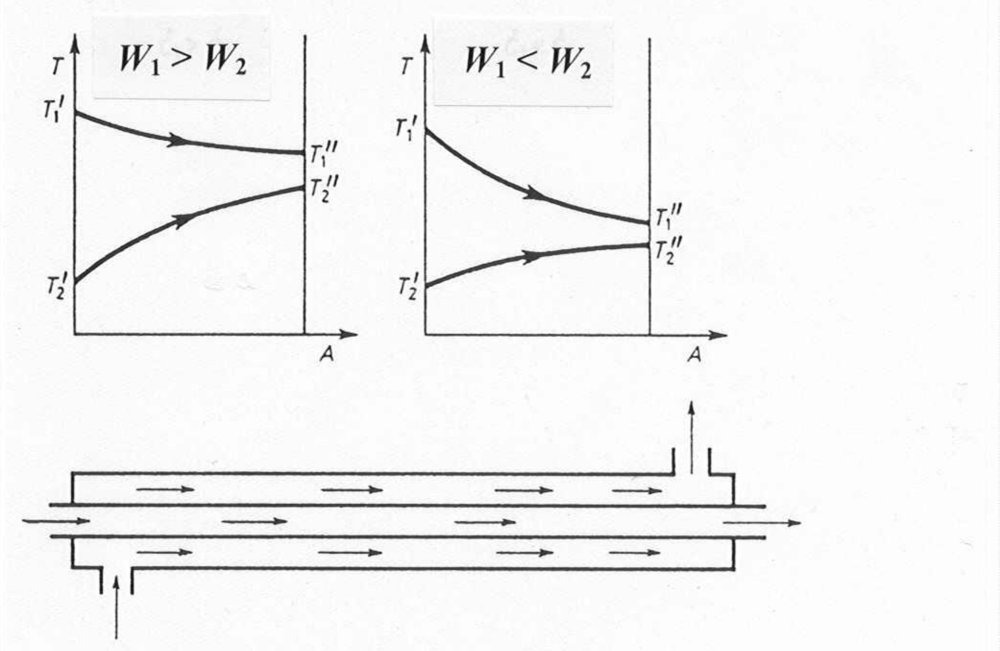
$$q_l = \frac{Q}{l} = \pi\, k_l \left(T_{f1} - T_{f2}\right) \quad \left[W / m\right] \tag{4.13}$$

gdzie $k_l \left[\frac{W}{mK}\right]$ jest liniowym współczynnikiem przenikania ciepła

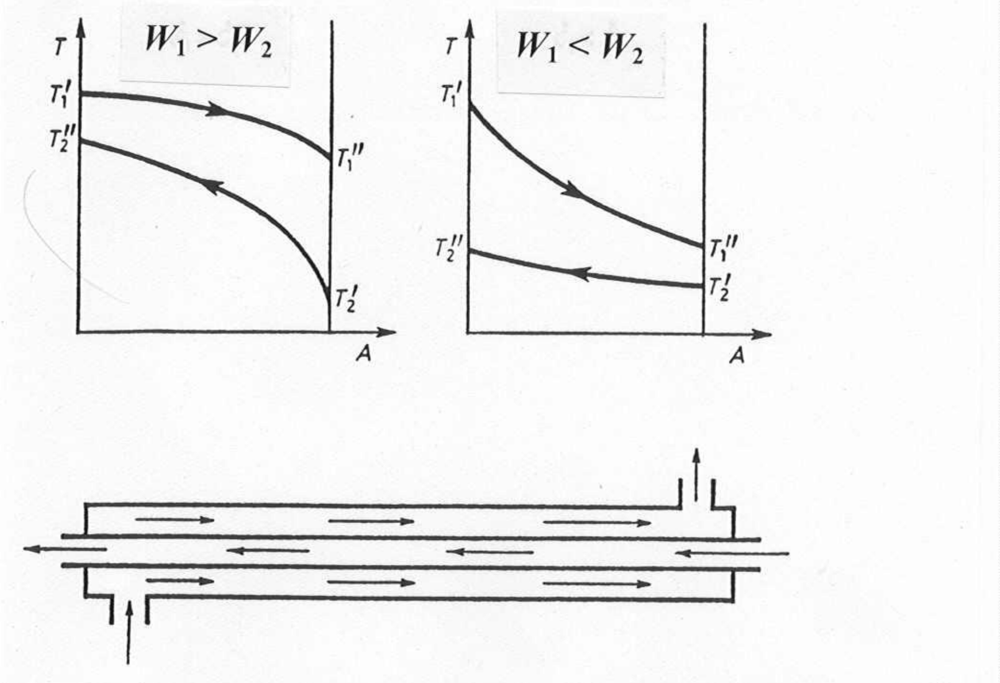
$$\frac{1}{k_l} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \tag{4.14}$$

5. Obliczanie wymienników ciepła

Pojemność cieplna czynnika $W = \dot{m} c_p$. Czynnik cieplejszy ma indeks 1.



Zmiany temperatur płynów we współprądowym wymienniku ciepła



Zmiany temperatur płynów w przeciwprądowym wymienniku ciepła

Bilans energetyczny wymiennika ciepła

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 c_{p1}\left(T_1^{'} - T_1^{''}\right) = \dot{m}_2 c_{p2}\left(T_2^{''} - T_2^{'}\right) \qquad (5.1a)$$

$$\dot{Q} = W_1\left(T_1^{'} - T_1^{''}\right) = W_2\left(T_2^{''} - T_2^{'}\right) \qquad (5.1b)$$

Równanie wymiany ciepła

$$\dot{Q} = kA_0 \Delta T_{sr} \tag{5.2}$$

Średnia różnica temperatur

$$\Delta T_{sr} = \frac{\int_0^{A_0} [T_1(A) - T_2(A)] dA}{A_0} \tag{5.3}$$

Średnia różnica temperatur dla wymienników współprądowych i przeciwprądowych

$$\Delta T_{sr} = \frac{\Delta T' - \Delta T''}{\ln \frac{\Delta T'}{\Delta T''}} \tag{5.4}$$

Gdzie dla współprądu

$$\Delta T' = T_1^{'} - T_2^{'} \tag{5.5a}$$
$$\Delta T'' = T_1^{''} - T_2^{''} \tag{5.5b}$$

- dla przeciwprądu

$$\Delta T' = T_1^{'} - T_2^{''} \tag{5.5c}$$
$$\Delta T'' = T_1^{''} - T_2^{'} \tag{5.5d}$$

Dla określonych temperatur wlotowych i wylotowych średnia różnica temperatur jest największa przy przepływie przeciwprądowym, a najmniejsza dla przepływu współprądowego. Średnia różnica temperatur dla wymienników o przepływie krzyżowo prądowym i mieszanym (ΔT_{srm}) leży w przedziale pomiędzy średnią dla współprądu (ΔT_{srwp}) i przeciwprądu (ΔT_{srpp})

$$\Delta T_{srpp} > \Delta T_{srm} > \Delta T_{srwp} \tag{5.6}$$

Średnią różnicę temperatur dla wymienników o przepływie krzyżowym i mieszanym można wyznaczyć wykorzystując poprawkę $\varepsilon_{\Delta T}$

$$\Delta T_{srm} = \Delta T_{srpp} \varepsilon_{\Delta T} \tag{5.7}$$

gdzie

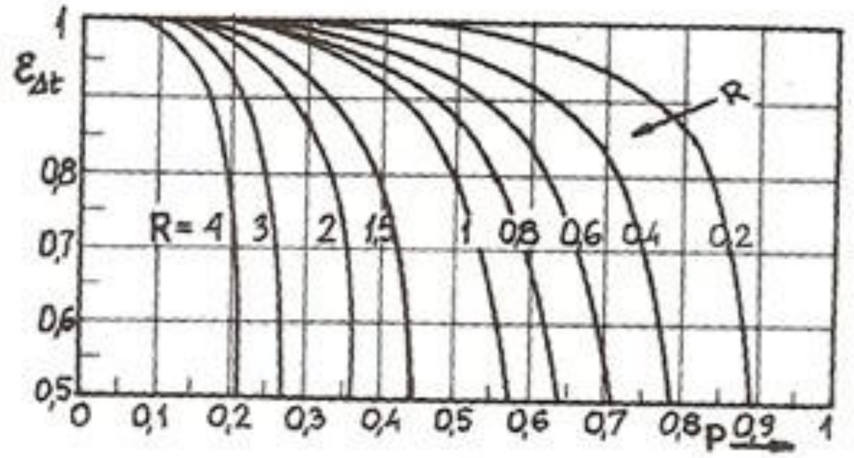
$$1 > \varepsilon_{\Delta T} > 0 \tag{5.8}$$

$$\varepsilon_{\Delta T} = f(P, R) \tag{5.9}$$

$$P = \frac{T_2^{''} - T_2^{'}}{T_1^{'} - T_2^{'}} \tag{5.10a}$$

$$R = \frac{T_1^{'} - T_1^{''}}{T_2^{''} - T_2^{'}} \tag{5.10b}$$

Korzystając z wykresów poprawek $\varepsilon_{\Delta T}$ należy zwrócić uwagę na to, dla jakiego przypadku są te poprawki, tzn. którym kanałem płynie czynnik gorący (1), a którym czynnik zimny (2). W pewnych przypadkach może to być bez znaczenia.



Poprawka $\varepsilon_{\Delta t} = f(P,R)$

Każdy typ wymiennika ma swój wykres poprawek $\varepsilon_{\Delta T} = f(P, R)$.